***Propunător* : prof. Stirbu Erika**

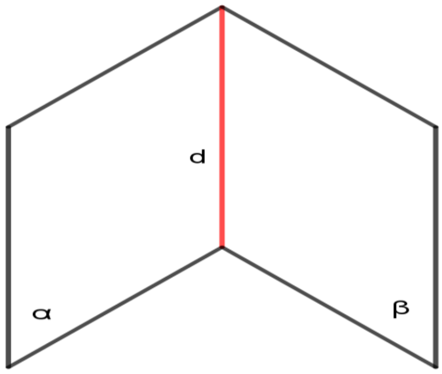
***Școala* : Școala Gimnazială „ Vasile Lucaciu” Carei**

***Titlul lecției* :** Unghi diedru. Unghiul a două plane. Plane perpendiculare

Clasa : a VIII -a .

Unghi diedru

Def. Figura geometrică formată de două semiplane mărginite de aceeași dreaptă se numește **unghi diedru**.

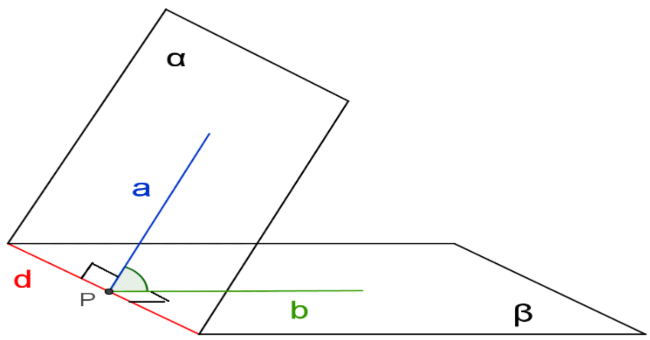


Obs. Cele două semiplane se numesc **fețele diedrului**.

Dreapta comună celor două semiplane se numește **muchia diedrului** .

d- muchia diedrului.

Def. Unghiul format de două drepte perpendiculare pe muchia diedrului într-un punct al ei, conținute respectiv în fețele diedrului se numește **unghi plan corespunzător diedrului**.



$\alpha \cap \beta = d$

$a \subset \alpha, b \subset \beta$

$a \perp d, b \perp d$

$a \cap b \cap d = \{P\}$

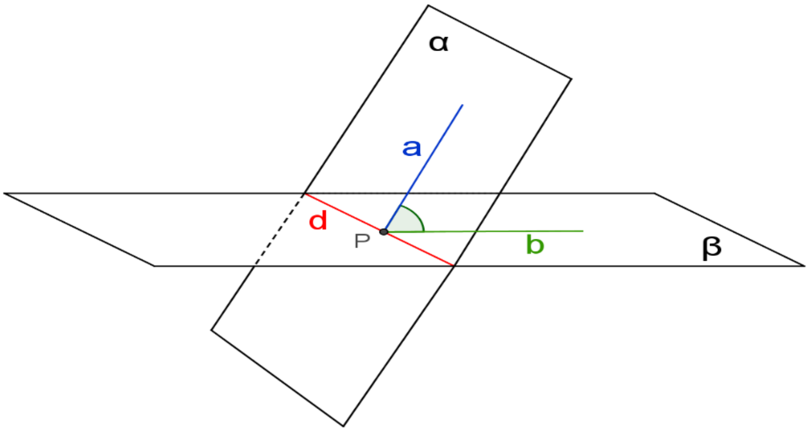
atunci un unghi plan al diedrului este $\sphericalangle(a,b)$

Obs. $m(\sphericalangle(a,b))$ nu depinde de poziția punctului P.

Def. **Măsura** unui **unghi diedru** este egală cu măsura unui unghi plan corespunzător diedrului.

$m(\sphericalangle(\alpha,\beta)) = m(\sphericalangle(a,b))$

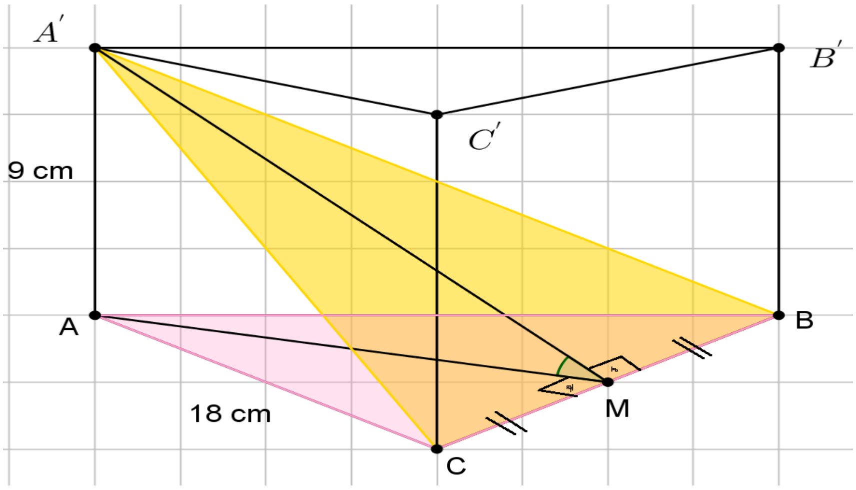
Def. **Măsura unghiului a două plane secante** este cea mai mică măsură a unghiurilor diedre deteminate de cele două plane .



Obs. Dacă planele α și β coincid sau sunt paralele, atunci $m(\sphericalangle(\alpha,\beta))=0^{\circ}$

Aplicație :

Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu AB = 18 cm și AA' = 9 cm. Calculați măsura unghiului diedru format de planele (A'BC) și (ABC).



Soluție: Putem observa că muchia diedrului format de planele (A'BC) și (ABC) este BC. Fie punctul M mijlocul segmentului BC.

Deoarece triunghiul ABC este echilateral, rezultă că mediana AM este și înălțime.

$\left.\begin{array}{l} A'A\perp AC \\ A'A\perp AB \\ AC, AB\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow A'A\perp(ABC)$, $\left.\begin{array}{l} A'A\perp(ABC) \\ AM\perp BC \\ AM, BC\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow$ din $T3\perp$, că $A'M\perp BC$.

$$\left.\begin{array}{l} (A'BC)\cap(ABC)=BC \\ AM\perp BC, AM\subset(ABC) \\ A'M\perp BC, A'M\subset(A'BC)\end{array}\right\}\Rightarrow \sphericalangle\big((A'BC),(ABC)\big)=\sphericalangle\big(A'M,AM\big)=\sphericalangle A'MA$$

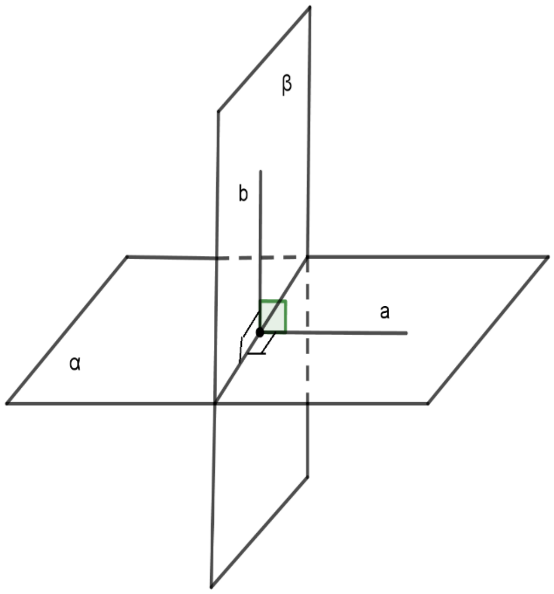
În triughiul echilateral ABC , calculăm înălțimea AM : $AM=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{18\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

$\left.\begin{array}{l} A'A\perp(ABC) \\ AM\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow A'A\perp AM$. În triunghiul dreptunghic A'AM : $\sphericalangle A=90^{\circ}$,

$tg\,M=\dfrac{A'A}{AM}=\dfrac{9}{9\sqrt{3}}\overset{\sqrt{3})}{=}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, de unde deducem că $m(\sphericalangle A'MA)=30^{\circ}$

Plane perpendiculare

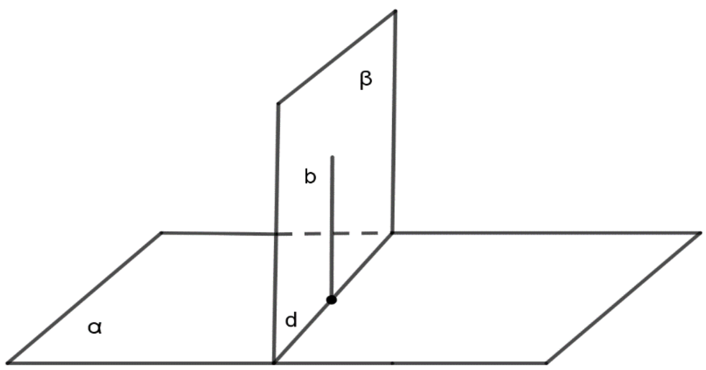
<u>*Def.*</u> Două plane care formează un unghi diedru cu măsura de 90° se numesc **plane perpendiculare.**



$$m\left(\sphericalangle\left(\alpha,\beta\right)\right)=m\left(\sphericalangle\left(a,b\right)\right)=90^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha \perp \beta$$

Teoremă. Dacă un plan conține o dreaptă perpendiculară pe un alt plan plan, atunci cele două plane sunt perpendiculare.

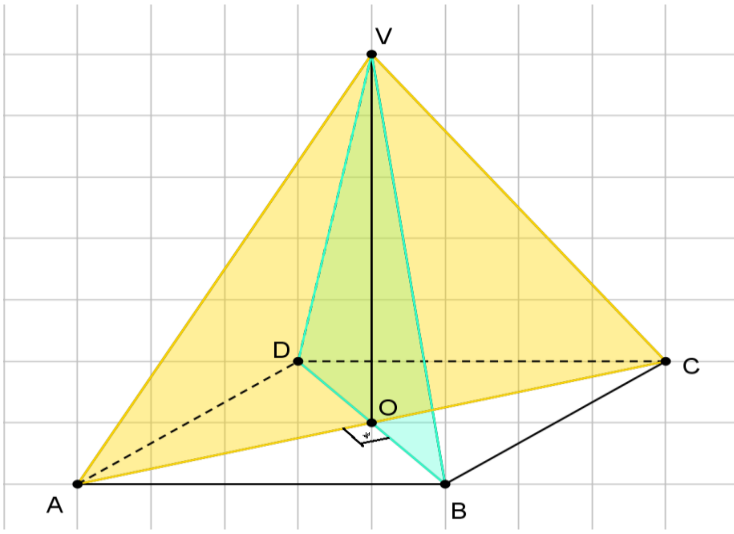


$$\left.\begin{array}{l} b\subset\beta \\ b\perp\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow \beta\perp\alpha$$

Aplicație:

Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată. Demonstrați că:

a) $(VAC)\perp(ABD)$
b) $(VAC)\perp(VBD)$



a) VO fiind înălțimea piramidei $\Rightarrow VO \perp (ABD)$.

$$\left.\begin{array}{l} VO \perp (ABD) \\ VO \subset (VAC) \end{array}\right\} \Rightarrow (VAC) \perp (ABD)$$

b) $AC \cap BD = \{O\}$

ABCD fiind pătrat $\Rightarrow AC \perp BD$.

$$\left.\begin{array}{l} VO \perp (ABD) \\ AC \subset (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow VO \perp AC.$$

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp VO \\ AC \perp DB \\ VO, DB \subset (VBD) \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (VBD),$$

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp (VBD) \\ AC \subset (VAC) \end{array}\right\} \Rightarrow (VAC) \perp (VBD).$$

Teoremă. Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă conținută în unul dintre ele și perpendiculară pe dreaptea lor de intersecție este perpendiculară pe celălalt plan .

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ b \subset \beta, b \perp d \\ \alpha \cap \beta = d \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha$$

Teoremă. Fiind date două plane perpendiculare, perpendiculara dintr-un punct oarecare al unuia pe celălalt este în întregime conținută în primul plan.

$$\alpha \perp \beta \text{ , } B \in \beta, BA \perp \alpha \text{ , } A \in \alpha \Rightarrow BA \subset \beta$$