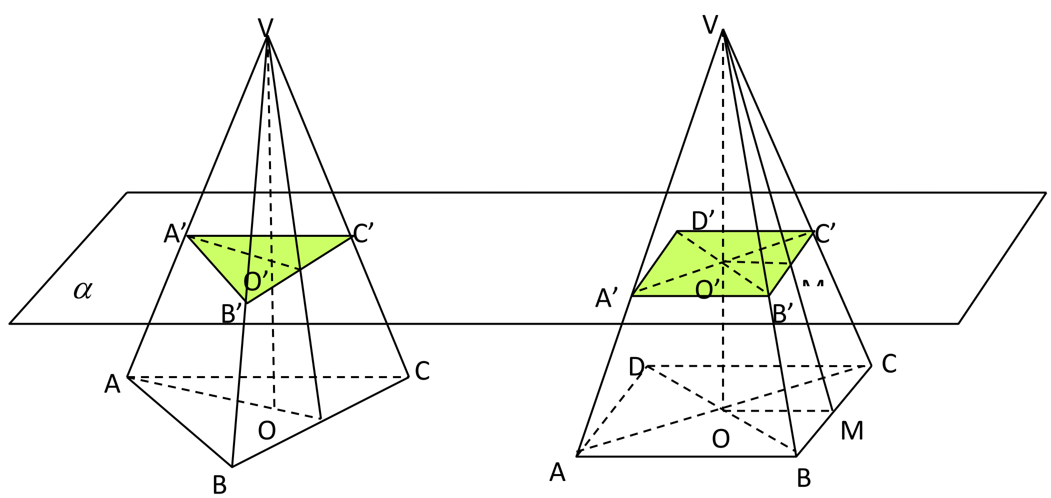
PARALELISM

Aplicatii: sectiuni paralele cu baza in corpurile geometrice studiate

TRUNCHIUL DE PIRAMIDA

Dacă secționăm o piramidă cu un plan paralel cu planul bazei, atunci în plan obținem un poligon cu laturile respective paralele cu laturile poligonului bazei piramidei, iar în piramidă, două corpuri: o piramidă mică având același vârf cu piramida inițială și elementele proporționale cu cele ale piramidei inițiale și un corp nou numit **trunchi de piramidă.**

- **Trunchiul de piramidă este corpul rămas în urma intersecției unei piramide cu un plan paralel cu planul bazei și îndepartarea piramidei mici, din varf.**
- **Pentru a desena un trunchi de piramidă se deseneaza mai întâi piramida !**
- **Elementele unui trunchi de piramidă sunt:**
  - **Bazele trunchiului de piramidă : baza mare și baza mică; sunt două poligoane cu laturile respective paralele.**
  - **Fetele laterale** : sunt întotdeauna trapeze. Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată, atunci fețele laterale sunt trapeze isoscele.
  - **Muchiile laterale** : sunt segmentele care rămân din muchiile laterale ale piramidei după ce se înlătură piramida mică. Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată , atunci muchiile laterale sunt congruente.
  - **Muchiile bazelor** : sunt laturile celor două poligoane care reprezintă bazele trunchiului de piramidă.



Piramidă triunghiulară regulată Piramidă patrulateră regulată

Hotca Ana
Școala gimnazială Nr.3 Negrești-Oaș

Se consideră un plan $\alpha \| (ABC)$. Atunci secțiunile rezultate sunt, în piramida triunghiulară regulate, triunghiul echilateral $\Delta A'B'C'$, respectiv, în priamida patrulateră regulată, pătratul A'B'C'D'.

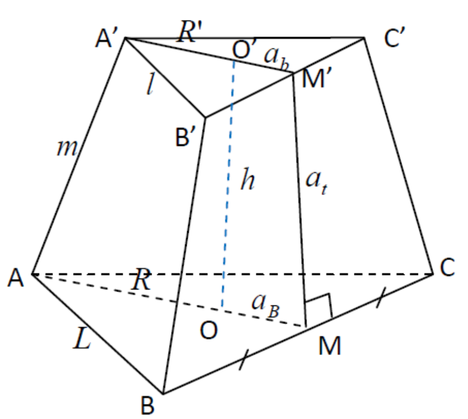
De asemenea, VO $\perp$(ABC), VO$\cap\alpha$={O'} și VM$\perp$BC, M$\in$(BC), VM$\cap\alpha$={M'}. Atunci, au loc următoarele relații:

$$\alpha \| (ABC) \quad \Rightarrow \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM} = \frac{AM'}{AM} = \frac{AO'}{AO} = \frac{O'M'}{OM} = k. \qquad (1)$$

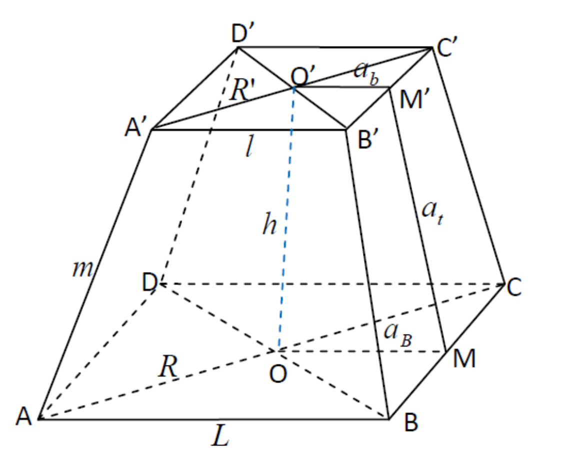
Piramidele mici formate deasupra planului de secțiune, având ca baze secțiunile rezultate, se numesc **piramide asemenea** cu cele inițiale. Astfel, pentru raportul de asemănare *k*, din relația (1), au loc relațiile :

Piramida triunghiulară regulată	Piramida ptrulateră regulată
➢ $\frac{P_{\Delta A'B'C'}}{P_{\Delta ABC}} = k$, $\quad \frac{A_{\Delta A'B'C'}}{A_{\Delta ABC}} = k^2$ ➢ $\frac{A_{\ell\, VA'B'C'}}{A_{\ell\, VABC}} = \frac{A_{t\, VA'B'C'}}{A_{t\, VABC}} = k^2$ ➢ $\frac{V_{VA'B'C'}}{V_{VABC}} = k^3$	➢ $\frac{P_{A'B'C'D'}}{P_{ABCD}} = k$, $\quad \frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = k^2$ ➢ $\frac{A_{\ell\, VA'B'C'D'}}{A_{\ell\, VABCD}} = \frac{A_{t\, VA'B'C'D'}}{A_{t\, VABCD}} = k^2$ ➢ $\frac{V_{VA'B'C'D'}}{V_{VABCD}} = k^3$

Corpul care se obține prin înlăturarea piramidei mici determinate de planul de secțiune se numește **trunchi de piramidă**.

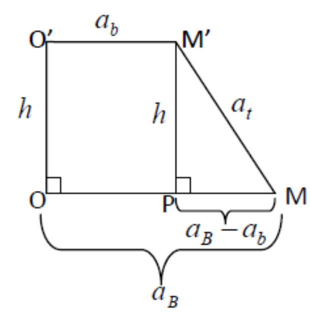


Trunchi de piramidă triunghiulară regulată



Trunchi de piramidă patrulateră regulată

Hotca Ana
Școala gimnazială Nr.3 Negrești-Oaș

Notații / Formule arii și volum	Semnificații	Legături utile între elemente
AB = L	Latura bazei mari	
A'B' = l	Latura bazei mici	
OO' = h	Înălțimea trunchiului	
AA' = m	Muchia laterală	
O'M' = a_b	Apotema bazei mici	$\boxed{a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2}$
OM = a_B	Apotema bazei mari	
MM' = a_t	Apotema trunchiului	
AO = R	Raza cercului circumscris bazei mari	Analog, din trapezul dreptunghic $A'AOO'$ se deduce relația:
A'O' = R'	Raza cercului circumscris bazei mici	$\boxed{m^2 = h^2 + (R - R')^2}$
$A_\ell = \dfrac{(P_b + P_B) \cdot a_t}{2}$	A_ℓ = aria laterală P_b / P_B = perimetrul bazei mici / mari	Iar din trapezul dreptunghic $M'MCC'$ se găsește relația: $\boxed{m^2 = a_t{}^2 + \left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{l}{2}\right)^2}$
$A_t = A_\ell + A_b + A_B$	A_t = aria totală A_b / A_B = aria bazei mici / mari	
$V = \dfrac{h}{3}\left(A_b + A_B + \sqrt{A_b \cdot A_B}\right)$	V = volumul trunchiului de piramidă	

Hotca Ana
Școala gimnazială Nr.3 Negrești-Oaș

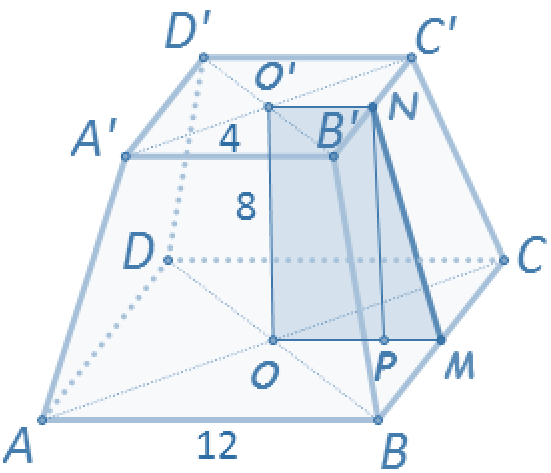
Problema 1

Fie ABCDA’B’C’D’ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari egală cu 12 cm, latura bazei mici egală cu 4 cm și înălțimea de 8 cm. Aflați:

a) aria totală și volumul trunchiului;

b) volumul piramidei inițiale din care provine trunchiul.

Rezolvare:



OM=AB/2=12/2=6 cm

O’N=A’B’/2=4/2=2 cm

Ducem NP⊥OM ⟹OPNO’ dreptunghi ⟹OP=O’N=2 cm ⟹PM=6-2=4 cm.

În continuare vom calcula apotema trunchiului: NM, folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic NPM, cu NP=O’O=8 cm și PM=4 cm:

$NP^2+PM^2 = NM^2$

$8^2+4^2 = NM^2$

NM = $a_t = \sqrt{60} = 4\sqrt{5}$

Am aflat apotema trunchiului și în continuare putem afla aria laterală:

$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2} = \frac{(12 \cdot 4 + 4 \cdot 4) \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 128\sqrt{5}\, cm^2$$

Hotca Ana
Școala gimnazială Nr.3 Negrești-Oaș

Pentru a afla aria totală, trebuie să calculăm ariile bazelor. Bazele sunt pătrate, așadar:

$A_b = 4^2 = 16$ cm^2

$A_B = 12^2 = 144$ cm^2

Aria totală a trunchiului de piramidă este egală cu aria laterală plus ariile bazelor:

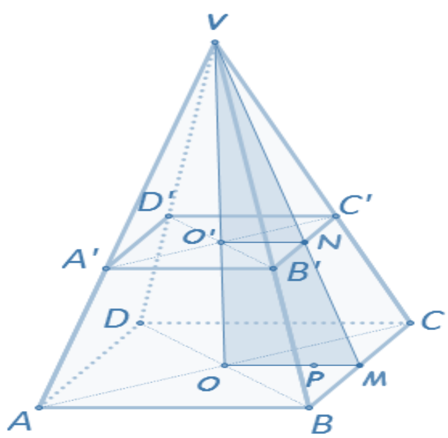
$$A_t = A_l + A_B + A_b = 128\sqrt{5} + 144 + 16 = 160 + 128\sqrt{5}\ cm^2$$

Să calculăm acum volumul trunchiului de piramidă:

$$V = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right) = \frac{8}{3}\left(144 + 16 + \sqrt{144 \cdot 16}\right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 208}{3} = \frac{1664}{3}\ cm^3$$

b)



Pentru a afla volumul piramidei inițiale, trebuie să aflăm înălțimea piramidei VO.

O'N este paralela cu OM, deci triunghiurile VO'N și VOM sunt asemenea, iar laturile lor sunt proporționale:

$$\frac{\mathrm{VO'}}{\mathrm{VO}} = \frac{\mathrm{O'N}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{VN}}{\mathrm{VM}}$$

$$\frac{\mathrm{VO'}}{\mathrm{VO'} + \mathrm{O'O}} = \frac{\mathrm{O'N}}{\mathrm{OM}}$$

$$\frac{\mathrm{VO'}}{\mathrm{VO'} + 8} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$3\mathrm{VO'} = \mathrm{VO'} + 8$$

$$2\mathrm{VO'} = 8$$

$$\mathrm{VO'} = 4$$

Înălțimea piramidei este h=VO=VO'+O'O=4+8=12 cm. Volumul piramidei VABCD este:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{12^2 \cdot 12}{3} = 576\ cm^3.$$

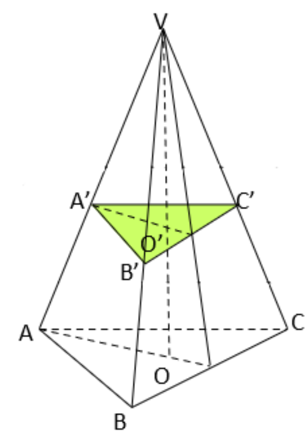
Problema 2

Un trunchi de piramida triunghiulara regulata are latura bazei mari 12 cm,latura bazei mici 8 cm,iar inaltimea trunchiului 2cm.Calculati:

a) apotema

b) aria totala

c) volumul trunchiului de con



a) $a_{tr}^2=(a_B-a_b)^2+h^2$

$a_B=\frac{1}{3}\bullet\frac{L\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}}{6}cm=2\sqrt{3}$cm

$a_b=\frac{1}{3}\bullet\frac{l\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{6}cm=\frac{4\sqrt{3}}{3}$cm

$a_{tr}^2=(2\sqrt{3}$cm $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$cm$)^2+2^2$cm$^2=(\frac{4}{3}+4)$cm$^2=\frac{16}{3}$ cm^2

$a_{tr}=\sqrt{\frac{16}{3}}$ cm$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

b) $A_B=\frac{L^2\sqrt{3}}{4}=\frac{144\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}(cm^2)$

$A_b=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{64\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}(cm^2)$

$A_{tr}=\frac{(P_{B+}P_{b)}}{2}\bullet a_{tr}$

$A_{tr}=\ \frac{3(L+l)\cdot a_{tr}}{2}\ a_{tr}=\frac{3\cdot 20\cdot 4\sqrt{3}}{6}=40(cm^2)$

$A_t=(36\sqrt{3}+16\sqrt{3}+40\sqrt{3})=92\sqrt{3}$ cm^2

c) $V=\frac{h}{3}\cdot(A_{B+}A_b+\sqrt{A_B.A_b})$

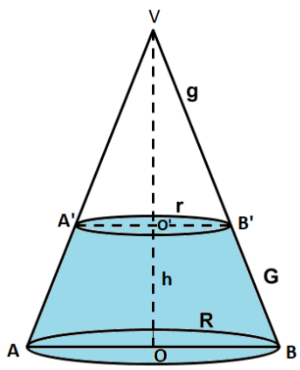
$V=\frac{2}{3}\cdot(36\sqrt{3}+16\sqrt{3}+\sqrt{36\sqrt{3}\cdot 16\sqrt{3}})$ cm$^3=\frac{2}{3}\cdot(52\sqrt{3}+24\sqrt{3})$cm^3

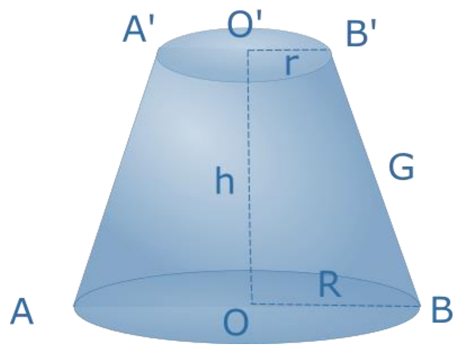
$V=\frac{2}{3}\cdot 76\sqrt{3}cm^3=\frac{152\sqrt{3}}{3}$cm^3

Hotca Ana
Școala gimnazială Nr.3 Negrești-Oaș

TRUNCHIUL DE CON CIRCULAR DREPT

Trunchiul de con circular drept este corpul obținut prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu baza și îndepărtarea conului de sus.





Trunchiul de con circular drept

Elementele trunchiului de con circular drept

- Baza mare: cercul de centru O și rază R;
- Baza mică: cercul de centru O' și rază r;
- Generatoarea: G = AA' = BB';
- Înălțimea: distanța dintre cele două baze: h = O'O.

Secțiunea axială a trunchiului de con circular drept este trapezul isoscel ABB'A'.

Aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept

$A_l = \pi G(R + r)$
$A_t = A_l + A_B + A_b = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$
$V = \pi h(R^2 + r^2 + Rr)/3.$

Hotca Ana
Școala gimnazială Nr.3 Negrești-Oaș

Problema 1

Fie trunchiul de con circular drept ABCD. Dacă *h* = 8 cm, *R* = 11 cm și *r* = 5 cm, să se calculeze:

a. generatoarea trunchiului de con;

b. aria laterală a trunchiului de con;

c. aria totală a trunchiului de con;

d. volumul trunchiului de con.

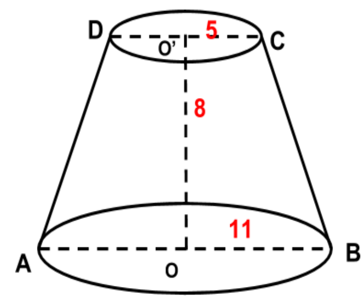
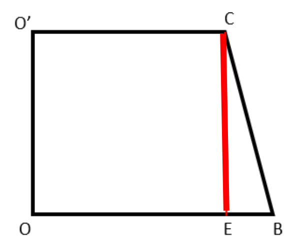


Figura 33

Rezolvare:

a) Vom calcula generatoarea G=BC a trunchiului de con



Ducem perpendiculara CE ⊥ OB

$r=OE=O'C=5cm$ si $R-r=EB=11cm-5cm=6cm$

$G^2=h^2+(R-r)^2=6^2cm^2+8^2cm^2=100cm^2 \Longrightarrow G=10cm$

b) $A_l=\pi G(R+r)=10(11+5)\ cm^2=160\pi cm^2$

c) $A_t=A_l+A_B+A_b$

$A_B=\pi\cdot 11^2cm^2=121\pi\ cm^2$

$A_b=\pi\cdot 5^2cm^2=25\pi\ cm^2$

$A_t=(160+121+250)\pi=531\pi\ cm^2$

d) $V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+R\cdot r)$

$V=\frac{\pi\cdot 8}{3}(11^2+5^2+11\cdot 5)cm^3=\frac{\pi\cdot 8}{3}(121+25+55)cm^3$

$V=\frac{\pi\cdot 8}{3}\cdot 201\ cm^3=536\pi cm^3$

Hotca Ana
Școala gimnazială Nr.3 Negrești-Oaș

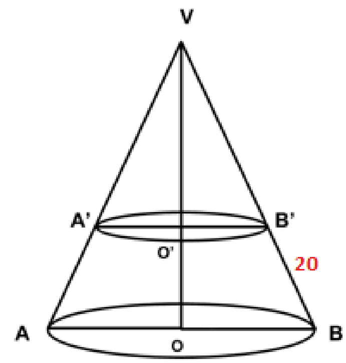
Problema 2

Într-un trunchi de con, raza bazei mari, înălțimea și generatoarea sunt proporționale cu numerele 6,4 și 5. Știind că generatoarea este 20cm, calculați:

a) aria laterală a trunchiului

b) volumul conului din care provine trunchiul

Rezolvare:



Calculăm raza bazei mari (R) și înălțimea h_{tr} a trunchiului de con :

$$\frac{R}{6} = \frac{h}{4} = \frac{G}{5} \Rightarrow \frac{R}{6} = \frac{h}{4} = \frac{20}{5} = 4cm$$

$$R = 6 \cdot 4cm = 24cm$$

$$h = 4 \cdot 4 = 16cm$$

a) $$A_l = \pi \cdot G(R + r)$$

$$A_l = \pi \cdot 20(24 + r)$$

Pentru a calcula raza bazei mici folosim formula :

$$G^2 = h^2 + (R - r)^2$$

$$20^2 = 16^2 + (R - r)^2$$

$$400 = 256 + (R - r)^2$$

$$r = R - 12 = 24 - 12 = 12cm$$

$$A_l = \pi \cdot 20(24 + 12)cm^2 = 720\pi cm^2$$

b) $$V_{con} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h_{con}}{3}$$

Pentru h_{con} folosim asemănarea triunghiurilor VO'B' și VOB

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{VB'}{VB} \qquad \frac{VO'}{h_{tr}} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{VO'}{VO'+16} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow VO' = 16cm$$

$$h_{con} = (16 + 16)cm = 32cm$$

$$V_{con} = \frac{\pi \cdot 24^2 \cdot 32}{3} cm^2 = 614\pi cm^2$$

Hotca Ana
Școala gimnazială Nr.3 Negrești-Oaș