Școala Gimnazială “Octavian Goga” Satu Mare
Structura Școala Gimnazială Nr.11 Sătmărel
Prof. Marilena Chiș

Clasa a VIII-a

Breviar teoretic și exemple

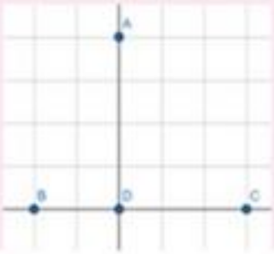
Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate (determinare prin calcul)

NE REAMINTIM:

Distanța dintre **două puncte** A și B este lungimea segmentului AB.

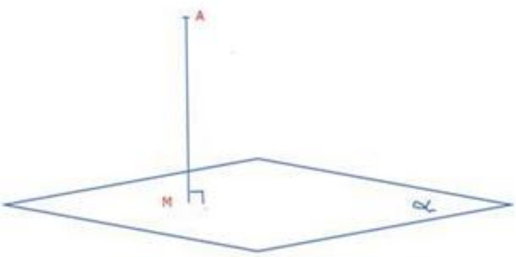
$d(A,B)=AB$

Distanța de la **un punct A la o dreaptă d** este egală cu lungimea segmentului determinat de punct și piciorul perpendicularei construite din punct pe dreaptă.



$AO \perp BC \Rightarrow d(A;BC)= AO$

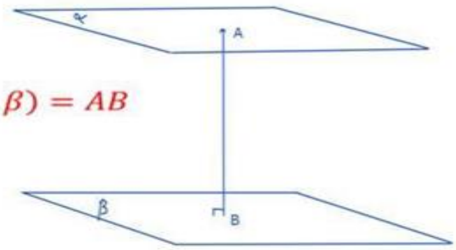
Distanța de la **un punct A la un plan α** este egală cu lungimea segmentului determinat de punct și piciorul perpendicularei construite din punct pe plan.



$AM \perp \alpha \; si \; M \in \alpha \Rightarrow d(A,\alpha) = AM$

Distanţa dintre două plane paralele este egală cu distanţa de la un punct al unui plan la celălalt plan.

$\alpha \parallel \beta$ $, A \in \alpha, AB \perp \beta, B \in \beta \Rightarrow d(\alpha, \beta) = AB$



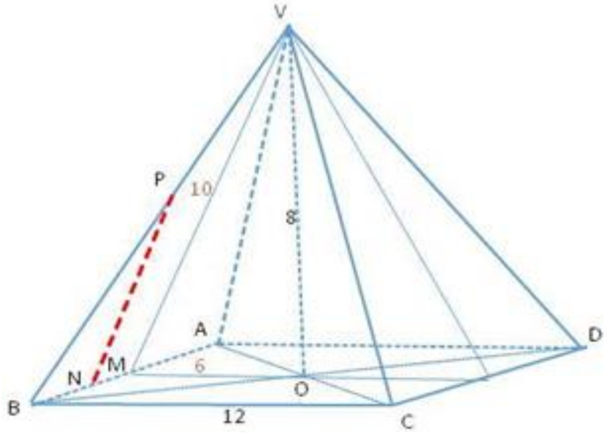
APLICAȚII

În piramida patrulateră regulată VABCD cu muchia bazei de 12 cm și înălțimea VO=8 cm , se consideră M, N și P mijloacele segmentelor BA, BM si BV. Să se afle:

1. distanța de la punctul N la punctul P
2. distanța de la punctul O la dreapta VA
3. distanța de la punctul O la planul (VDC)
4. distanța de la punctul M la planul (VDC)

Rezolvare

1. distanța de la punctul N la punctul P.



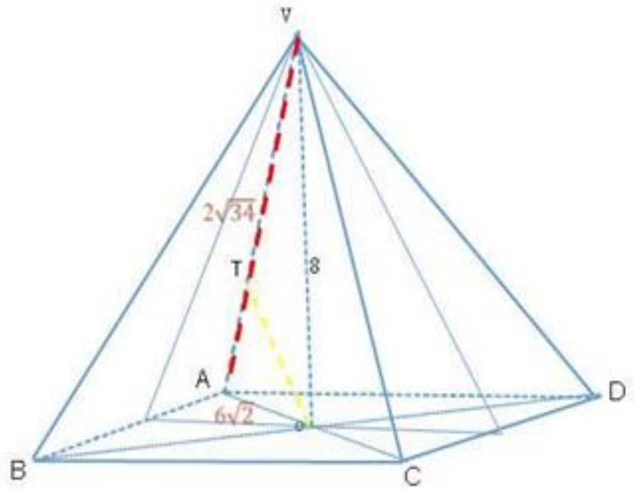
- OM = apotemă în pătrat $\Rightarrow$ OM= $\frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm
- $\left.\begin{matrix} VO \perp (ABC) \\ OM \subset (ABC) \end{matrix}\right| \Rightarrow VO \perp OM \Rightarrow \Delta VOM$ = dreptunghic
- Din teorema lui Pitagora $\Rightarrow VM^2=VO^2+OM^2$

$VM^2=8^2+6^2 \Rightarrow VM^2=64+31 \Rightarrow VM^2=100 \Rightarrow$

- VM=10 cm
- Din N= mijlocul lui [MB] și P= mijlocul lui [VB] $\Rightarrow$

NP linie mijlocie în $\Delta VBM \Rightarrow NP=\frac{VM}{2}=\frac{10}{2}=5$cm $\Rightarrow d(N;P)=$ 5cm

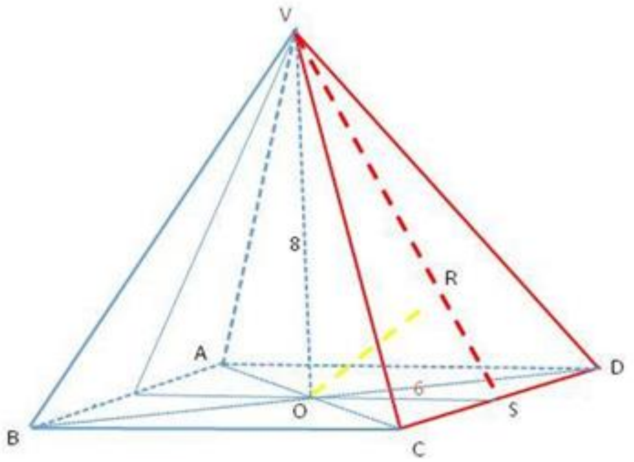
2. distanța de la punctul O la dreapta VA.



- Fie $OT \perp VA \Rightarrow d(O;VA)=OT$
- $OA=\frac{AC}{2}=\frac{l\sqrt{2}}{2}=\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ cm (AC este diagonală in pătrat)
- $\left.\begin{matrix} VO \perp (ABC) \\ OA \subset (ABC) \end{matrix}\right| \Rightarrow VO \perp OA \Rightarrow \Delta VOA$= dreptunghic.
- Din teorema lui Pitagora $\Rightarrow VA^2=VO^2+OA^2$
- $\Rightarrow VA^2=64+72 \Rightarrow VA^2=136 \Rightarrow VA=2\sqrt{34}$ cm
- ΔVOA- dreptunghic în O și $OT \perp VA \Rightarrow OT=\frac{c_1 \cdot c_2}{i_p}=\frac{OA \cdot OV}{AV}$
- $OT=\frac{6\sqrt{2} \cdot 8}{2\sqrt{34}}=\frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{34}}=\frac{24\sqrt{68}}{34}=\frac{24 \cdot 2\sqrt{17}}{34}=\frac{24\sqrt{17}}{17}$ cm

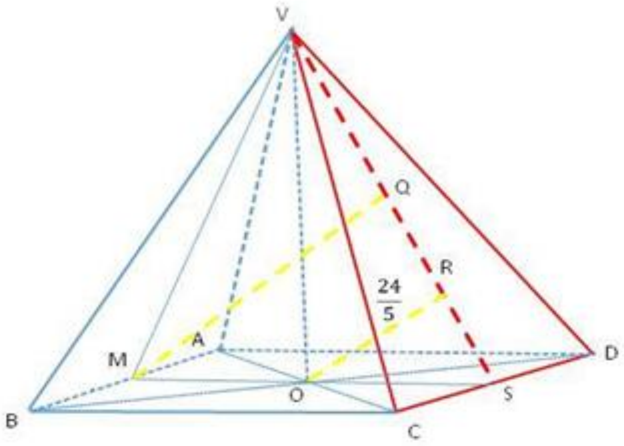
$\Rightarrow d(O;VA)=\frac{24\sqrt{17}}{17}$cm

3. distanța de la punctul O la planul (VDC).



- Fie S mijlocul lui DC și $OR \perp VS$
- $\left.\begin{array}{l} DC \perp OS \\ DC \perp VO \end{array}\right| \Rightarrow DC \perp (VOS)$.
- $\left.\begin{array}{l} DC \perp (VOS) \\ OR \subset (VOS \end{array}\right| \Rightarrow DC \perp OR \Rightarrow OR \perp DC$
- $\left.\begin{array}{l} OR \perp DC \\ OR \perp VS \end{array}\right| \Rightarrow OR \perp (VDC) \Rightarrow d(O;(VDC)) = OR$
- ΔVOS- dreptunghic în O și $OR \perp VS \Rightarrow$
- $OR = \frac{VO \cdot OS}{VS}$
- $OR = \frac{8 \cdot 6}{10} = \frac{24}{5}$cm $\Rightarrow d(O;(VDC)) = \frac{24}{5}$cm

4. distanța de la punctul M la planul (VDC).



- Fie $MQ \perp VS$
- $DC \perp (VOS)$ (subpunctul anterior) $\Rightarrow DC \perp (VMS)$
- $\left.\begin{array}{l} DC \perp (VMS) \\ MQ \subset (VMS) \end{array}\right| \Rightarrow DC \perp MQ \Rightarrow MQ \perp DC$.
- $\left.\begin{array}{l} MQ \perp DC \\ MQ \perp VS \end{array}\right| \Rightarrow MQ \perp (VDC) \Rightarrow d(M;(VDC)) = VQ$
- În ΔVMS, $\left.\begin{array}{l} OR \perp VS \\ MQ \perp VS \end{array}\right| \Rightarrow OR \parallel MQ$ și cum O= mijlocul lui MS $\Rightarrow$ OR=linie mijlocie în ΔMQS
- $\Rightarrow MQ = 2OR \Rightarrow MQ = 2 \cdot \frac{24}{5} = \frac{48}{5}$cm.
- Observație: MQ se mai poate determina și prin scrierea ariei triunghiului VMS în două moduri $A_{\Delta VMS} = \frac{MS \cdot VO}{2} = \frac{MQ \cdot VS}{2}$

UNGHIURI ÎN SPAȚIU

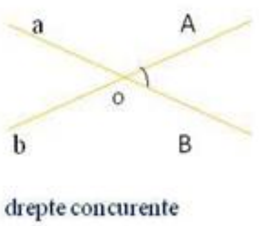
Măsura unghiului dintre două drepte:

- ***concurente*** **:** este cea mai mică măsură a unghiurilor formate de cele două drepte.
- ***paralele*****:** este egală cu 0°.
- ***necoplanare:*** este măsura unghiului format de paralelele duse printr-un punct oarecare (convenabil ales) la cele două drepte.

$\sphericalangle(a;b) = \sphericalangle AOB$
$\sphericalangle(a;b) \leq 90°$

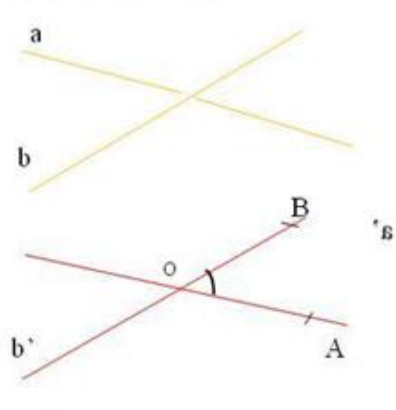
$a \parallel b \Rightarrow \sphericalangle(a;b) = 0°$

$a \parallel a', b \parallel b' \Rightarrow \sphericalangle(a;b) = \sphericalangle(a';b')$



drepte concurente

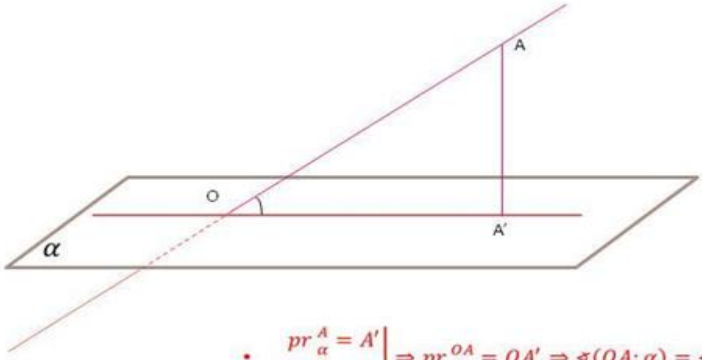
drepte paralele



drepte necoplanare

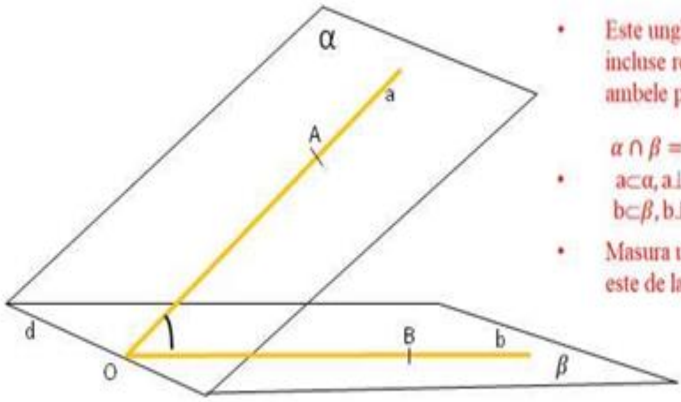
Măsura unghiului dintre o dreapta şi un plan este măsura unghiului format de dreaptă şi proiecţia ei pe plan.

***Dacă dreapta este paralelă cu planul**, atunci unghiul dintre dreapta şi plan este unghiul nul.*



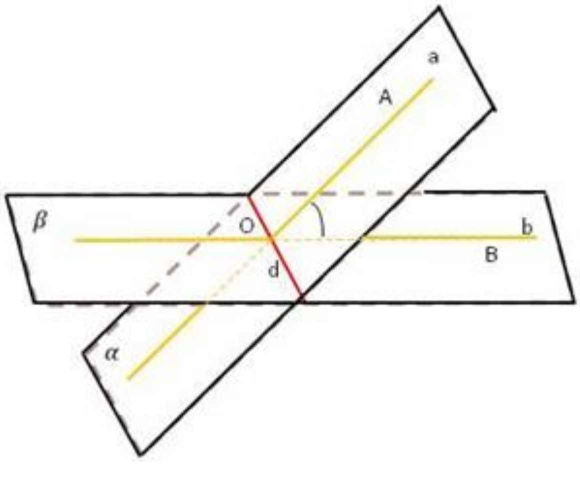
- $\left.\begin{array}{l} pr_{\alpha}^{A} = A' \\ pr_{\alpha}^{O} = O \end{array}\right| \Rightarrow pr_{\alpha}^{OA} = OA' \Rightarrow \sphericalangle(OA;\alpha) = \sphericalangle(OA;OA') = \sphericalangle AOA'$

Unghiul plan al unui unghi diedru



- Este unghiul format de două semidrepte incluse respectiv, in cele două semiplane, ambele perpendiculare pe muchia diedrului
- $\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d \\ a \subset \alpha, a \perp d \\ b \subset \beta, b \perp d \end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle(\alpha;\beta) = \sphericalangle(a;b) = \sphericalangle AOB$
- Masura unui unghi plan al unui unghi diedru este de la 0° la 180°

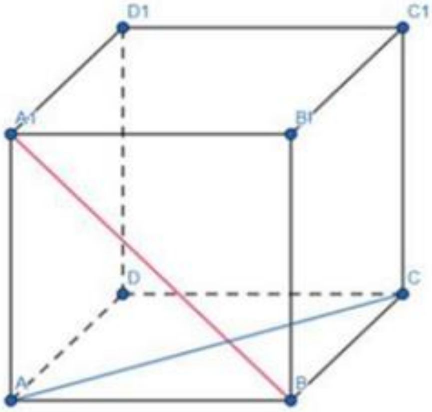
Unghiul dintre două plane



- Este unghiul format de doua drepte incluse respectiv, in cele doua plane, ambele perpendiculare pe dreapta de intersectie
- $\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d \\ a \subset \alpha, a \perp d \\ b \subset \beta, b \perp d \end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle(\alpha;\beta) = \sphericalangle(a;b) = \sphericalangle AOB$
- Masura unui unghi dintre două plane este cel mult egală cu 90°
- Daca planele sunt paralele, măsura unghiului dintre ele este de 0°, iar dacă planele sunt perpendiculare, măsura unghiului dintre ele este de 90°

APLICAȚIA 1

Se consideră cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$



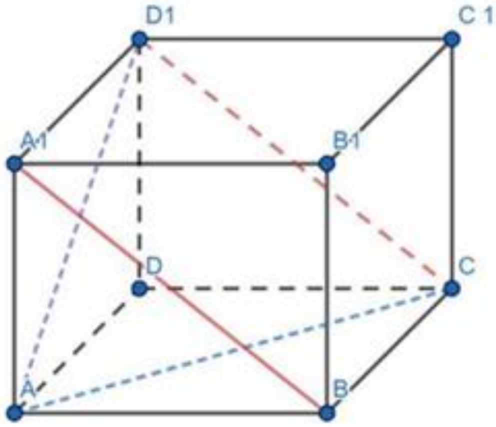
1) Măsura unghiului determinat de dreptele AD şi CC_1 este egală cu:

a) 30^0 b) 45^0 c) 60^0 d) 90^0

2) Măsura unghiului determinat de dreptele AC şi A_1B este egală cu:

a) 30^0 b) 45^0 c) 60^0 d) 90^0

Rezolvare

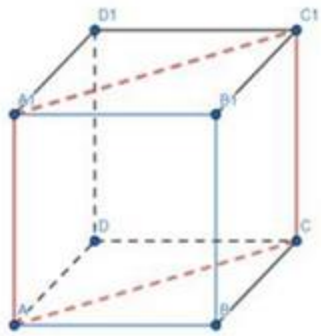


1. $\sphericalangle(AD, CC_1) = \sphericalangle(AD, DD_1) =$
$\sphericalangle ADD_1 = 90^0$,
pentru că ADD_1A_1 este pătrat.
Răspunsul corect d)

2. Considerăm $D_1C \parallel A_1B \Rightarrow \sphericalangle(AC, A_1B) =$
$\sphericalangle(AC, D_1C) = \sphericalangle ACD_1$
$AC = CD_1 = AD_1$ = diagonale în feţele cubului=>
ΔACD_1 echilateral => $\sphericalangle ACD_1 = 60^0$
Răspunsul corect c)

APLICAȚIA 2

Demonstraţi că într-un cub $ABCDA_1B_1C_1D_1$, măsura unghiului format de planele (ABB_1) şi (ACC_1) este egală cu 45^0.



Rezolvare

Avem de aflat măsura unghiului plan al diedrului format de planele (ABB_1) şi (ACC_1).
$(ABB_1) \cap (ACC_1) = AA_1$,
$AB \perp AA_1$, $AB, AA_1 \subset (ABA_1)$
$AC \perp AA_1$, $AC, AA_1 \subset (ACA_1)$
$\sphericalangle((ABA_1), (ACA_1)) = \sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle BAC$
Deoarece $ABCD$ este pătrat => $\sphericalangle BAC = 45^0$.

APLICAȚIA 3

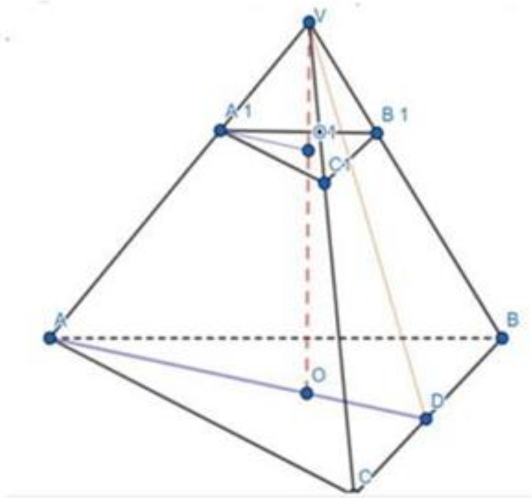
Piramida triunghiulară regulată VABC se secţionează cu un plan($A_1B_1C_1$) paralel cu baza, $A_1 \in VA$, $B_1 \in VB$, $C_1 \in VC$.

Dacă lungimea laturii AB = 24 cm, înălţimea piramidei VO = 16 cm, iar perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$ = 54 cm, determinaţi distanţa dintre planele (ABC) şi ($A_1B_1C_1$).

Rezolvare

Deoarece ($A_1B_1C_1$) // (ABC) =>
distanţa dintre planele (ABC) şi ($A_1B_1C_1$)=
distanţa de la O_1 la (ABC) = OO_1
$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, $\Delta VO_1A_1 \sim \Delta VOA$
$\Delta A_1B_1C_1$ echilateral cu P =54 cm =>
$3 \cdot l = 54$ cm => l =18 cm
Folosind Teorema fundamentală a asemănării =>

$$\frac{VO_1}{VO} = \frac{VA_1}{VA} = \frac{A_1B_1}{AB} \Rightarrow \frac{VO_1}{16} = \frac{18}{24} \Rightarrow VO_1 = 12 \text{ cm}$$



Distanţa dintre plane = 16cm -12cm = 4 cm

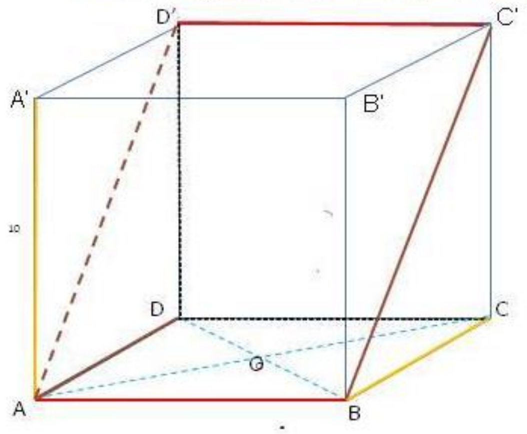
APLICAȚIA 4

În cubul ABCDA'B'C'D' , de muchie 10 cm, se consideră punctul M, mijlocul lui AA'. Se cere să se afle:

1. Măsura unghiului dintre dreptele AB si C'D', măsura unghiului dintre dreptele BC si AA' și măsura unghiului dintre dreptele AD și BC'.
2. Măsura unghiului dintre dreptele AD' și A'B.
3. Cosinusul unghiului dintre dreapta BD' și planul (ABC).
4. Tangenta unghiului dintre planele (MBD) și (ABC).
5. Sinusul unghiului dintre planele (MBD) și (A′BD).

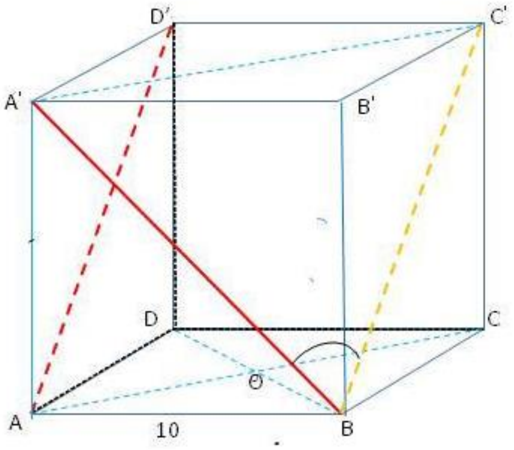
Rezolvare

1. Măsura unghiului dintre dreptele AB si C'D', măsura unghiului dintre dreptele BC si AA' și măsura unghiului dintre dreptele AD și BC'.



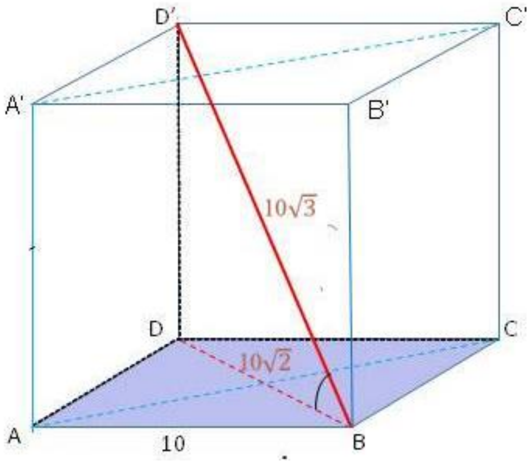
- $\left.\begin{array}{l} ABCD = \text{pătrat} \Rightarrow AB \parallel CD \\ CDD'C' = \text{pătrat} \Rightarrow CD \parallel C'D' \end{array}\right| \Rightarrow AB \parallel C'D' \Rightarrow$
  $\sphericalangle(AB; C'D') = 0^\circ$
- $BC \parallel AD \Rightarrow \sphericalangle(BC; AA') = \sphericalangle(AD; AA')) = \sphericalangle A'AD = 90^\circ$
  $(ADD'A' = \text{pătrat}) \Rightarrow \sphericalangle(BC; AA') = 90^\circ$
- c) $AD \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle(AD;BC') = \sphericalangle(BC; BC') = \sphericalangle CBC' = 45^\circ$
  $(BCC'B' = \text{pătrat}) \Rightarrow \sphericalangle(AD;BC') = 45^\circ$

2. Masura unghiului dintre dreptele AD' și A'B.



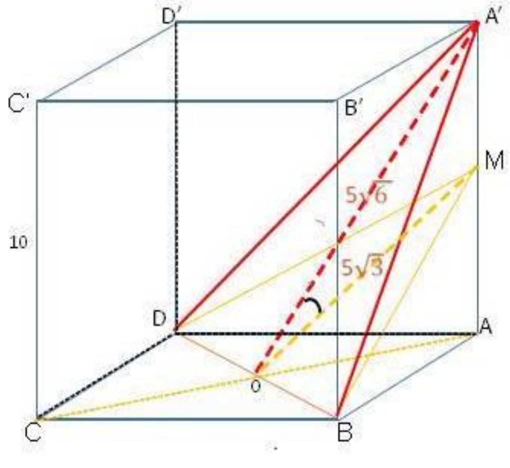
- $\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ CD \parallel C'D' \end{array}\right| \Rightarrow AB \parallel C'D' \Rightarrow ABC'D'$ paralelogram $\Rightarrow$ $AD' \parallel BC' \Rightarrow \sphericalangle(AD'; A'B) = \sphericalangle(BC'; A'B) = \sphericalangle A'BC'$
- Dar $A'B = BC' = C'A'$ (diagonale în fețele cubului) $\Rightarrow$ $\Delta A'BC'$ = echilateral $\Rightarrow \sphericalangle A'BC' = 60^{\circ} \Rightarrow$
- $\sphericalangle(AD'; A'B) = 60^{\circ}$.

3. Cosinusul unghiului dintre dreapta BD' și planul (ABC).



- $\left.\begin{array}{l} pr^{B}_{(ABC)} = B \\ pr^{D'}_{(ABC)} = D \end{array}\right| \Rightarrow \; pr^{BD'}_{(ABC)} = BD \quad \Rightarrow$
- $\sphericalangle(BD'; (ABC)) = \sphericalangle(BD'; BD) = \sphericalangle D'BD$.
- $D'B = l\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ (diagonală în cub), $DB = l\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ (diagonală în pătrat).
- $\left.\begin{array}{l} D'D \perp (ABC) \\ DB \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow \quad D'D \perp DB \Rightarrow \Delta D'DB$ = dreptunghic $\Rightarrow \cos\sphericalangle D'DB = \frac{BD}{BD'} = \frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$
- $\Rightarrow \cos\sphericalangle(BD'; (ABC)) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

5. Sinusul unghiului dintre planele (MBD) și $(A'BD)$.



- De la subpunctul anterior, $MO \perp BD$ si analog, aratam ca $A'O \perp BD$
- $\left.\begin{array}{l} A'A \perp (ABC) \\ A'O; BD \subset (ABC) \\ AO \perp BD \end{array}\right| \Rightarrow A'O \perp BD$ (teorema celor trei perpendiculare)
- $\left.\begin{array}{l} (A'BD) \cap (MBD) = BD \\ A'O \subset (A'BD),\ A'O \perp BD \\ MO \subset (MBD),\ MO \perp BD \end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle((A'BD); (MBD)) =$
- $\sphericalangle(A'O; MO) = \sphericalangle A'OM$.
- Din teorema lui Pitagora in ΔMAO, dreptunghic $MO^2 = MA^2 + AO^2$
- $\Rightarrow MO^2 = 25 + 50 \Rightarrow MO^2 = 75 \Rightarrow MO = 5\sqrt{3}$
- Din teorema lui Pitagora in $\Delta A'AO$, dreptunghic $\Rightarrow$
- $A'O^2 = A'A^2 + AO^2 \Rightarrow A'O^2 = 100 + 50 \Rightarrow A'O^2 = 150$
- $\Rightarrow A'O = 5\sqrt{6}$ cm
- $A_{A'OM} = \frac{A'M \cdot OA}{2} = \frac{OM \cdot OA' \cdot \sin\sphericalangle A'OM}{2} \Rightarrow$
- $5 \cdot 5\sqrt{2} = 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{6} \sin\sphericalangle A'OM \Rightarrow$
- $\sin\sphericalangle A'OM = \frac{5 \cdot 5\sqrt{2}}{5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3}$

TEMĂ

1. Se consideră cubul ALGEBRIC cu latura de 6 cm.

a) Determinaţi tangenta unghiului format de BG cu planul (LRI).

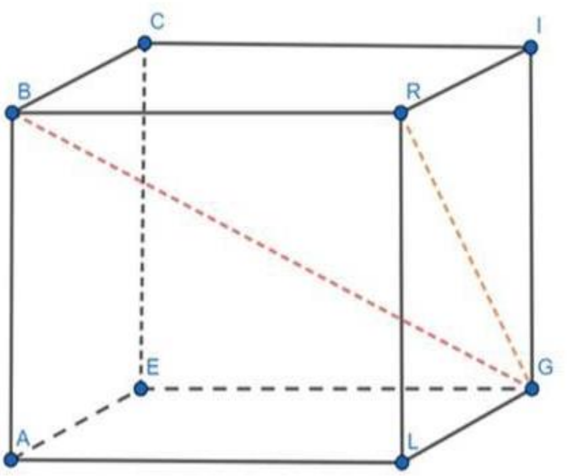
b) Calculaţi distanţa de la punctul E la planul (AGC).

2. Se consideră VABCD o piramidă patrulateră regulată cu AB=VD=8 cm. Notăm cu O centrul bazei ABCD.
Arătaţi că distanţa de la mijlocul M al segmentului VO la planul (VBC) este mai mică decât 1,8 cm.

SUCCES!

Indicație:

1. b) EAGC =piramidă triunghiulară regulată



2. Arătăm că d(M, (VBC))= MG