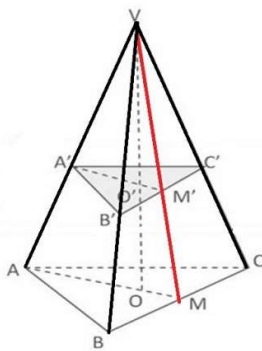


Clasa a VIII-a

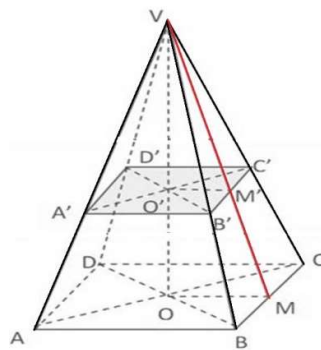
Breviar teoretic și exemple

Trunchiul de piramidă – arii și volum

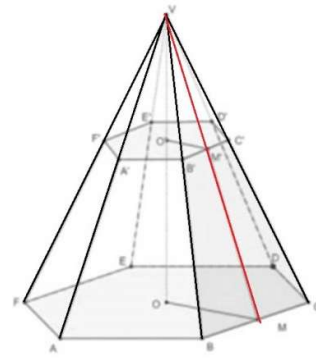
Trunchiul de piramidă regulată se obține prin îndepărtarea piramidei mici rezultate din secționarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza.



trunchi de piramidă
triunghiulară
regulată

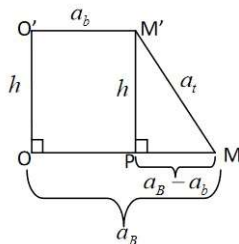


trunchi de piramidă
patrulateră
regulată



trunchi de piramidă
hexagonală
regulată

Segmentul care unește mijloacele a două muchii ale bazelor, situate pe aceeași față laterală, se numește **apotema** trunchiului de piramidă regulată (notată a_t). Mod de calcul pentru apotemă trunchi:



$$a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$$

a_B = apotema bazei mari,
 a_b = apotema bazei mici



Bazele trunchiului de piramidă regulată sunt poligoane regulate. Piramida mică (îndepărtată) este asemenea cu piramida din care provine trunchiul, raportul de asemănare (k) fiind egal cu raportul dintre muchia bazei mici și muchia bazei mari.

Formule pentru calcul arii și volum trunchi de piramidă regulată

Notăm L = latura bazei mari, l = latura bazei mici, h = înălțime trunchi

- ✓ Aria laterală a trunchiului de piramidă regulată este suma ariilor fețelor laterale (notată A_l)

Dacă $P_B = 3L$ = perimetrul bazei mari, $P_b = 3l$ = perimetrul bazei mici, atunci:

$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$$

- ✓ Aria totală (notată A_t) a trunchiului de piramidă regulată este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze:

$$A_t = A_l + A_B + A_b$$

- ✓ Volumul (V) trunchiului de piramidă regulată este:

$$V = \frac{h}{3} \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$$

unde A_B = aria bazei mari, A_b = aria bazei mici

Trunchi piramidă triunghiulară regulată	Trunchi piramidă patrulateră regulată	Trunchi piramidă hexagonală regulată
$A_B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$	$A_B = L^2$	$A_B = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$
$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$A_b = l^2$	$A_b = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Exemple

- 1) Calculăm aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu $L = 24$ cm, $l = 6$ cm și $h = 3$ cm.

Rezolvare (folosim desenul din prima pagină)

Calculăm apotemele bazelor și apoi apotema trunchiului

$$a_B = OM = \frac{L\sqrt{3}}{6} = 4\sqrt{3} \text{ cm}, a_b = O'M' = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow a_t = 6 \text{ cm}$$

Aplicăm formulele de calcul pentru arii și volum:

$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2} = \frac{(3 \cdot 24 + 3 \cdot 6) \cdot 6}{2} = 270 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3} \text{ cm}^2, A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Deci } A_t = A_l + A_B + A_b = 270 + 153\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) = \frac{3}{3} \cdot (144\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + \sqrt{144\sqrt{3} \cdot 9\sqrt{3}})$$

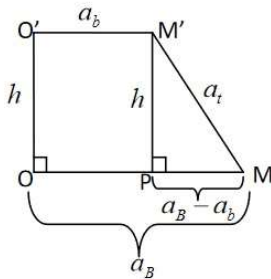
$$V = 189\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

- 2) Calculăm volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $L = 16 \text{ cm}$, $l = 6 \text{ cm}$ și $a_t = 13 \text{ cm}$.

Rezolvare (folosim desenul din prima pagină)

Calculăm apotemele bazelor și apoi înălțimea trunchiului:

$$a_B = OM = \frac{L}{2} = 8 \text{ cm}, \quad a_b = O'M' = \frac{l}{2} = 3 \text{ cm}$$



Prin Pitagora în $\Delta M'MP \Rightarrow h^2 = 13^2 - (8 - 3)^2 \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$

$$V = \frac{h}{3} \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) = \frac{12}{3} \cdot (16^2 + 6^2 + \sqrt{16^2 \cdot 6^2})$$

$$V = 4 \cdot (256 + 36 + 16 \cdot 6) = 4 \cdot 388 = 1552 \text{ cm}^3.$$

- 3) Calculăm volumul unui trunchi de piramidă hexagonală regulată cu $L = 6 \text{ cm}$, $l = 4 \text{ cm}$ și $h = 6 \text{ cm}$.

Rezolvare (folosim desenul din prima pagină)

Calculăm ariile bazelor:

$$A_B = 6 \cdot \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad A_b = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) = \frac{6}{3} \cdot (54\sqrt{3} + 24\sqrt{3} + \sqrt{54\sqrt{3} \cdot 24\sqrt{3}})$$

$$V = 2 \cdot (78\sqrt{3} + 36\sqrt{3}) = 2 \cdot 114\sqrt{3} = 228\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$