prof. Dumitru Lorena - Emanuela
Școala Gimnazială Halmeu

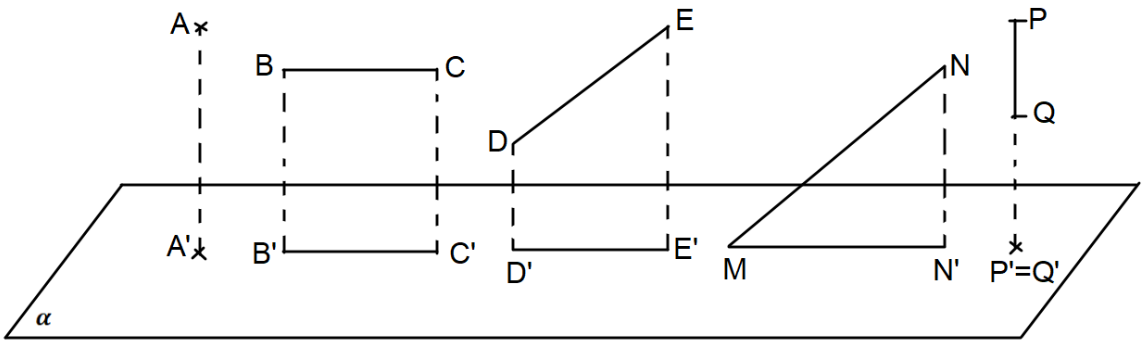
Clasa a VIII- a

Proiecții ortogonale pe un plan.

Teorema celor trei perpendiculare. Distanțe

Proiecții ortogonale pe un plan

Proiecția unui punct *A* pe un plan α este piciorul perpendicularei duse din punctul *A* pe planul α.



$pr_{\alpha}A = A'$

$pr_{\alpha}[BC] = [B'C']$

$pr_{\alpha}[DE] = [D'E']$

$pr_{\alpha}[MN] = [MN']$

$pr_{\alpha}[PQ] = P'$

- **Proiecția unui punct pe un plan este întotdeauna un punct.**
- **Proiecția unui segment pe un plan este un segment sau un punct.**
- **Dacă un punct $A \in \alpha$ atunci $pr_{\alpha}A = A$.**

Exemplu:

Fie *VABCD* o piramidă patrulateră regulată. Determinați următoarele proiecții:

prof. Dumitru Lorena - Emanuela
Școala Gimnazială Halmeu

a) $\boldsymbol{pr_{(ABC)}V}$
b) $\boldsymbol{pr_{(VBD)}A}$
c) $\boldsymbol{pr_{(ABD)}[VC]}$
d) $\boldsymbol{pr_{(ABC)}\Delta VBD}$
e) $\boldsymbol{pr_{(ABC)}\Delta VBC}$

Demonstrație:

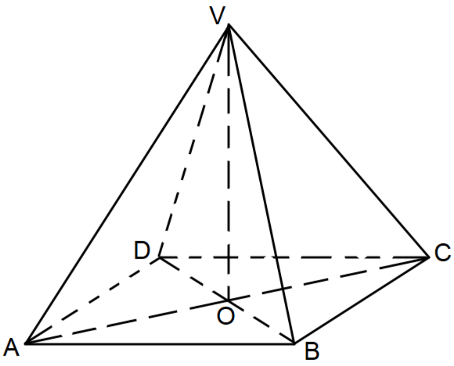
a) $pr_{(ABC)}V = O$

b) $pr_{(VBD)}A = O$

c) $pr_{(ABD)}[VC] = [OC]$

d) $pr_{(ABC)}\Delta VBD = [BD]$

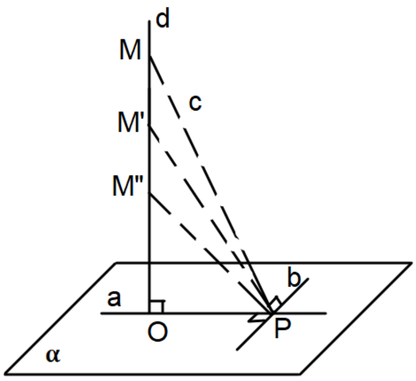
e) $pr_{(ABC)}\Delta VBC = \Delta OBC$



Teorema celor trei perpendiculare

Dacă o dreaptă *d* este perpendiculară pe un plan *α* și prin piciorul ei trece o dreaptă *a*, conținută în plan, perpendiculară pe o altă dreaptă *b* conținută în plan, atunci o dreaptă *c*, care unește orice punct *M* al dreptei *d* cu intersecția *P* a dreptelor *a* și *b*, este perpendiculară pe a treia dreaptă *b*.

Ipoteză:
$\boldsymbol{d \perp \alpha}$
$\boldsymbol{a, b \subset \alpha}$
$\boldsymbol{a \perp b}$
$\boldsymbol{a \cap d = \{O\}}$
$\boldsymbol{a \cap b = \{P\}}$
$\boldsymbol{M \in d}$



Concluzie:
$\boldsymbol{MP \perp b}$

Demonstrație:

$$\left.\begin{matrix} d \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp b \Rightarrow b \perp d$$

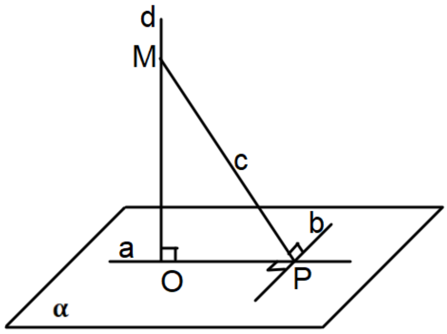
prof. Dumitru Lorena - Emanuela
Școala Gimnazială Halmeu

$$\left.\begin{array}{r} b \perp a \\ b \perp d \\ a \cap d = \{O\} \\ a, d \subset (MOP) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b \perp (MOP) \\ MP \subset (MOP) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp MP \Rightarrow MP \perp b \Rightarrow d(M, b) = MP.$$

Reciproca 1 a T3⊥

Ipoteză:

$\boldsymbol{d \perp \alpha}$
$\boldsymbol{a, b \subset \alpha}$
$\boldsymbol{d \cap a = \{O\}}$
$\boldsymbol{a \cap b = \{P\}}$
$\boldsymbol{M \in d}$
$\boldsymbol{MP \perp b}$



Concluzie:

$\boldsymbol{a \perp b}$

Demonstrație:

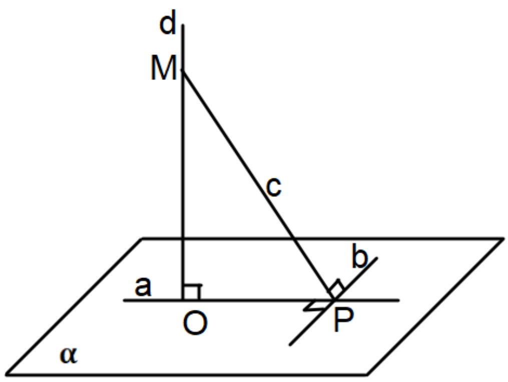
$$\left.\begin{array}{r} d \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp b \Rightarrow b \perp d$$

$$\left.\begin{array}{r} b \perp MP \\ b \perp d \\ d \subset (MOP) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b \perp (MOP) \\ a \subset (MOP) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a \Rightarrow a \perp b.$$

Reciproca 2 a T3⊥

Ipoteză:

$\boldsymbol{d \perp a}$
$\boldsymbol{a, b \subset \alpha}$
$\boldsymbol{d \cap a = \{O\}}$
$\boldsymbol{a \perp b}$
$\boldsymbol{a \cap b = \{P\}}$
$\boldsymbol{M \in d}$
$\boldsymbol{MP \perp b}$



Concluzie:

$\boldsymbol{d \perp \alpha}$

prof. Dumitru Lorena - Emanuela
Școala Gimnazială Halmeu

Demonstrație:

$$\left.\begin{array}{r} b \perp a \\ b \perp MP \\ a \subset (MOP) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b \perp (MOP) \\ d \subset (MOP) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp d \Rightarrow d \perp b$$

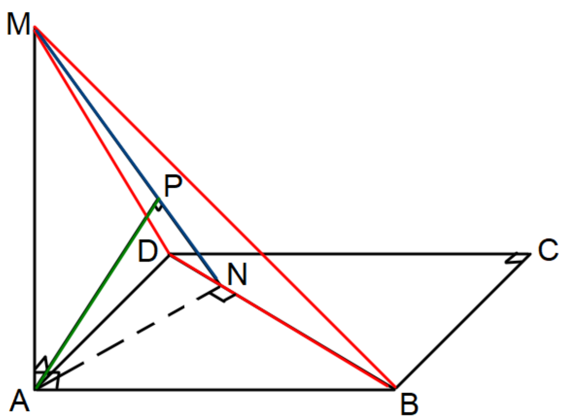
$$\left.\begin{array}{r} d \perp b \\ d \perp a \\ a, b \subset \alpha \\ a \cap b = \{P\} \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp \alpha.$$

Exemplu:

Pe planul dreptunghiului $ABCD$, $AB = 40\ cm$, $BC = 30\ cm$, se ridică perpendiculara $AM = 24\sqrt{3}\ cm$. Aflați distanța de la punctul M la dreapta BD și distanța de la punctul A la planul (MBD).

Ipoteză:
$ABCD$ **dreptunghi**
$AB = 40\ cm$
$BC = 30\ cm$
$MA \perp (ABC)$
$MA = 24\sqrt{3}\ cm$

Concluzie:
$d(M, BD)$
$d(A, (MBD))$



Demonstrație:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta ABD \\ \sphericalangle A = 90^\circ \end{array}\right\} \overset{T.P.}{\Longrightarrow} BD^2 = AD^2 + AB^2 \Longrightarrow BD^2 = 30^2 + 40^2 \Longrightarrow BD = \sqrt{2500}$$

$$\Longrightarrow BD = 50\ cm$$

$$\left.\begin{array}{r} MA \perp (ABC) \\ AN \perp BD \\ AN, BD \subset (ABC) \\ AN \cap BD = \{N\} \end{array}\right\} \overset{T3\perp}{\Longrightarrow} MN \perp BD \Longrightarrow d(M, BD) = MN$$

$$\left.\begin{array}{r} \Delta ABD \\ \sphericalangle A = 90^\circ \\ AN \perp BD \end{array}\right\} \Longrightarrow AN = \frac{AD \cdot AB}{BD} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24\ cm$$

$$\left.\begin{array}{r} MA \perp (ABC) \\ AN \subset (ABC) \end{array}\right\} \Longrightarrow MA \perp AN$$

prof. Dumitru Lorena - Emanuela
Școala Gimnazială Halmeu

$$\left.\begin{array}{c}\Delta MAN\\ \sphericalangle A=90^\circ\end{array}\right\}\overset{T.P.}{\Longrightarrow} MN^2=MA^2+AN^2\Rightarrow MN^2=(24\sqrt{3})^2+24^2\Rightarrow MN=\sqrt{2304}$$

$\Rightarrow MN=48\ cm.$

Fie $AP\perp MN, P\in MN$

$$\left.\begin{array}{c}MN\perp BD\\ MN,BD\subset(MBD)\\ AN\perp BD, AN\cap BD=\{N\}\\ AP\perp MN, AP\cap MN=\{P\}\end{array}\right\}\overset{R_2T3\perp}{\Longrightarrow} AP\perp(MBD)\Rightarrow d\big(A,(MBD)\big)=AP$$

$$\left.\begin{array}{c}\Delta MAN\\ \sphericalangle A=90^\circ\\ AP\perp MN\end{array}\right\}\Rightarrow AP=\frac{MA\cdot AN}{MN}=\frac{24\sqrt{3}\cdot 24}{48}=12\sqrt{3}\ cm.$$