PARALELISM IN SPAȚIU

Ne reamintim că în spațiu două drepte pot fi:

- Identice – au două puncte comune
- Concurente – au un punct comun
- Paralele – coplanare care nu niciun punct comun
- Necoplanare – nu au niciun punct comun și nu sunt situate în același plan

Proprietatea 1 (tranzitivitatea relației de paralelism a dreptelor): Două drepte distincte din spațiu, paralele cu o a treia dreaptă, sunt paralele între ele.

Proprietatea 2: Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare

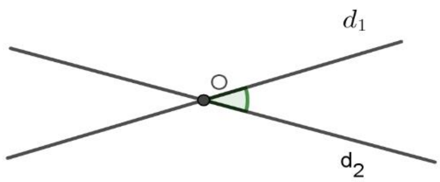
Unghiul a două drepte în spațiu

Cazul 1. Dacă cele două **drepte** sunt **coplanare**, atunci unghiul lor se poate determina ca și în geometria plană.

a) Dacă $d_1 = d_2$ (drepte identice), atunci $m\sphericalangle(d_1, d_2) = 0^\circ$.

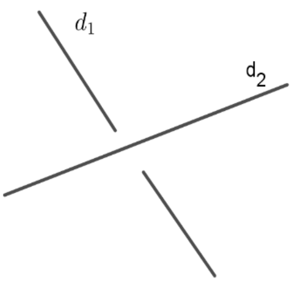
b) Dacă $d_1 \parallel d_2$ (drepte paralele), atunci $m\sphericalangle(d_1, d_2) = 0^\circ$.

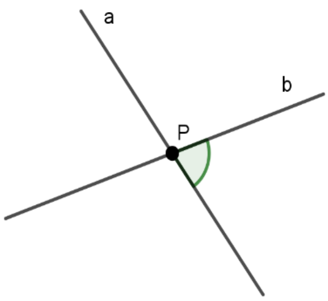
c) Dacă $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ (drepte concurente), atunci măsura unghiului dintre cele două drepte este egală cu măsura acelui unghi dintre unghiurile formate în jurul punctului O, care nu este obtuz (cea mai mică dintre cele patru).



$m\sphericalangle(d_1, d_2) \le 90^\circ$

Cazul 2. Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt **necoplanare,** atunci măsura unghiului format de ele, este egală cu măsura unghiului format de paralelele duse la aceste drepte printr-un punct arbitrar al spațiului (în rezolvarea problemelor, de multe ori este convenabil ca punctul ales să aparțină uneia dintre drepte și prin el să construim paralelă la cealaltă dreaptă).





$d_1 \nparallel d_2$, $d_1 \cap d_2 = \varnothing$

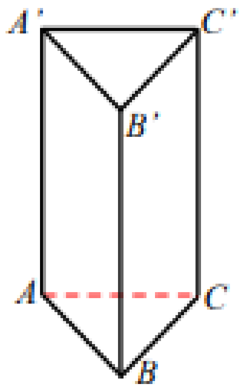
$a \cap b = \{P\}, a \parallel d_1, b \parallel d_2$

$m\sphericalangle(d_1, d_2) = m\sphericalangle(a, b)$

Exemplu:

Prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C' are latura bazei AB și muchia laterală AA'. Determinați măsurile unghiurilor dintre dreptele:

a) AC și AA' b) AC și B'C' c) AB și CC'



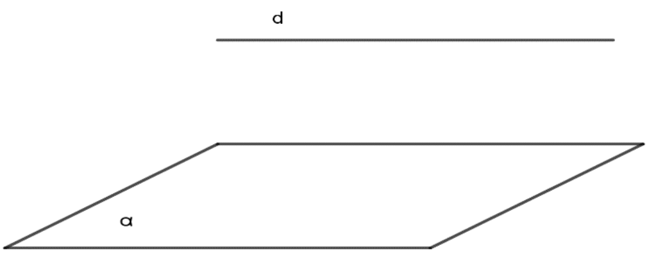
a) $\sphericalangle(AC, AA') = 90°$ (ACC'A'-dreptunghi)

b) B'C' $\parallel$ BC $\Rightarrow$ $\sphericalangle(AC, B'C') = \sphericalangle(AC, BC) = 60°$ (ΔABC echilateral)

c) CC' $\parallel$ BB' $\Rightarrow \sphericalangle(AB, CC') = \sphericalangle(AB, BB') = 90°$

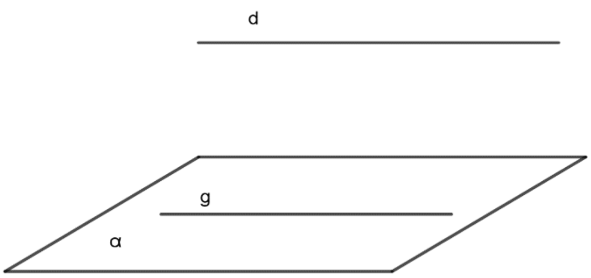
Dreaptă paralelă cu un plan

Definiție: O dreaptă este paralelă cu un plan dacă nu are puncte comune cu planul (se poate spune și că planul este paralel cu dreapta).



$$d \cap \alpha = \varnothing$$
$$d \parallel \alpha$$

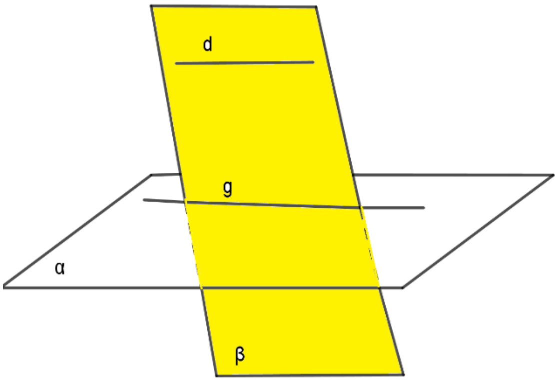
Teorema 1: O dreaptă neconținută într-un plan este paralelă cu planul, dacă este paralelă cu o dreaptă din acel plan.



$$\left.\begin{array}{l} d \parallel g \\ g \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel \alpha$$

Observație: Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, nu rezultă că este paralelă cu orice dreaptă din acel plan.

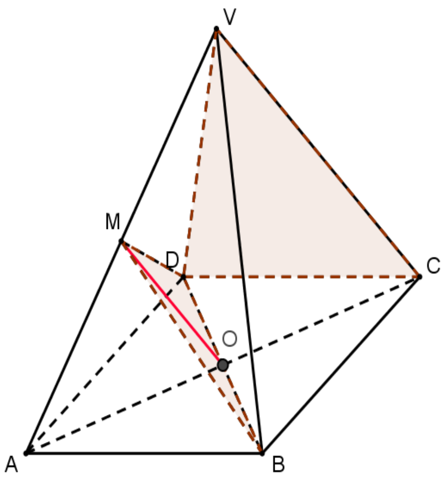
Teorema 2: Dacă printr-o dreaptă paralelă cu un plan ducem un plan care intersectează planul dat, atunci dreapta de intersecție este paralelă cu dreapta dată.



$$\left.\begin{array}{l} d \parallel \alpha \\ d \subset \beta \\ \beta \cap \alpha = g \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel g$$

Teorema 3: Dacă planele α și β sunt paralele, atunci orice dreaptă d conținută în planul α va fi paralelă cu planul β.

Aplicație: VABCD este o piramidă patrulateră regulată de vârf V, O este centrul bazei, iar M este mijlocul muchiei VA . Arătați că: a) $MO \parallel (VDC)$ b) $VC \parallel (MBD)$



a) $\left.\begin{array}{l} \text{MO} \parallel \text{VC (MO este linie mijlocie în } \Delta\,\text{AVC)} \\ \text{VC} \subset \text{(VDC)} \end{array}\right\} \Rightarrow MO \parallel (VDC)$

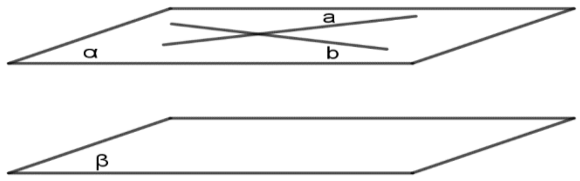
b) $\left.\begin{array}{l} \text{VC} \parallel \text{MO} \\ \text{MO} \subset \text{(MBD) (O este mijlocul lui BD)} \end{array}\right\} \Rightarrow VC \parallel (MBD)$

Plane paralele

Definiție: Două plane sunt paralele dacă nu au niciun punct comun.

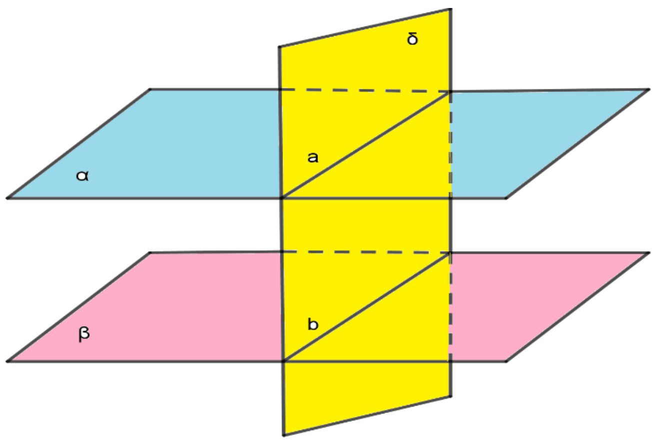
Pentru a dovedi că două plane sunt paralele,avem următoarea

Teorem 1: Dacă două drepte concurente dintr-un plan, sunt paralele cu un alt plan, atunci cele două plane sunt paralele.



$$\left.\begin{array}{l} a\subset\alpha, b\subset\alpha \\ a\cap b\neq\varnothing \\ a\parallel\beta, b\parallel\beta \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$$

Teorema 2: Dacă două plane paralele sunt intersectate de un al treilea plan, atunci dreptele de intersecție sunt paralele. (Teorema „ fierăstrăului”)

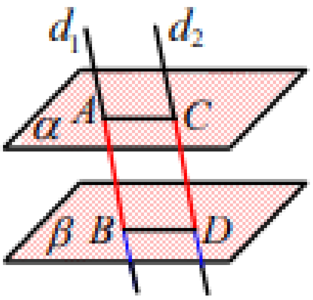


$$\left.\begin{array}{l} \alpha\parallel\beta \\ \delta\cap\alpha=a \\ \delta\cap\beta=b \end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

Teorema 3 (tranzitivitatea relației de paralelism a planelor): Două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.

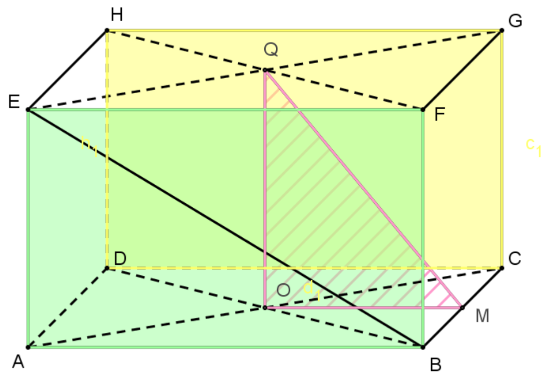
$$\left.\begin{array}{l} \alpha\parallel\beta \\ \beta\parallel\gamma \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\gamma$$

Teorema 4: Două plane paralele care intersectează două drepte paralele, determină pe acestea segmente congruente.



$$\left.\begin{array}{c} \alpha \parallel \beta \\ d_1 \parallel d_2 \\ d_1 \cap \alpha = \{A\},\ d_1 \cap \beta = \{B\} \\ d_2 \cap \alpha = \{C\},\ d_2 \cap \beta = \{D\} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \equiv CD$$

Aplicație: ABCDEFGH este un paralelipiped dreptunghic, punctele O și Q sunt centrele bazelor ABCD, respectiv EFGH, iar punctul M este mijlocul segmentului BC. Demonstrați că (BFE) || (MOQ) || (CDH).



De remarcat că (BFE)=(ABFE)

$$\left.\begin{array}{l} OM \parallel AB \text{ (OM linie mijlocie în } \Delta ABC) \Rightarrow OM \parallel (ABFE) \\ OQ \parallel AE \text{ (AECG dreptunghi și O,Q sunt mijloacele laturilor AC și EG)} \Rightarrow OQ \parallel (ABFE) \\ OM \cap OQ = \{O\}; \\ MO,\ OQ \subset (MOQ) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$(BFE) || (MOQ)   (1)

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \text{ (ABCD dreptunghi)} \Rightarrow AB \parallel (DCGH) \\ BF \parallel CG \text{ (BCGF dreptunghi)} \Rightarrow BF \parallel (DCGH) \\ AB,\ BF \subset (BFE) \\ AB \cap BF = \{B\} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(ABFE) || (DCGH)}$$

(sau (BFE) || (CDH))   (2)

Din relațiile (1) și (2) (prin tranzitivitate) rezultă concluzia problemei.

Propunător: Poptile Voichița-Școala Gimnazială Gherța Mică