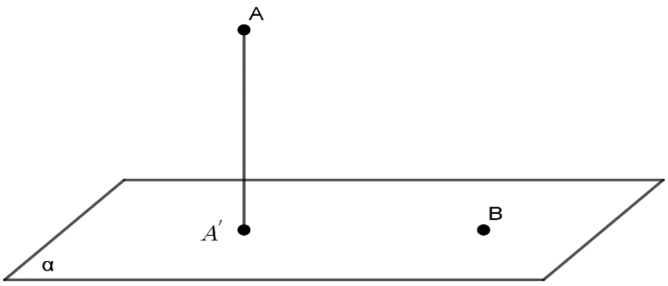
prof. ŞTIRBU ERIKA
Şcoala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Carei

Merőleges vetületek a síkra

<u>*Ért.*</u> Egy A pontból valamely síkra bocsátott merőleges talppontjáról azt mondjuk, hogy az a A pont **merőleges vetülete a síkra**.

<u>*Megj.*</u> Ha a pont benne van a síkban, akkor a vetülete önmaga.



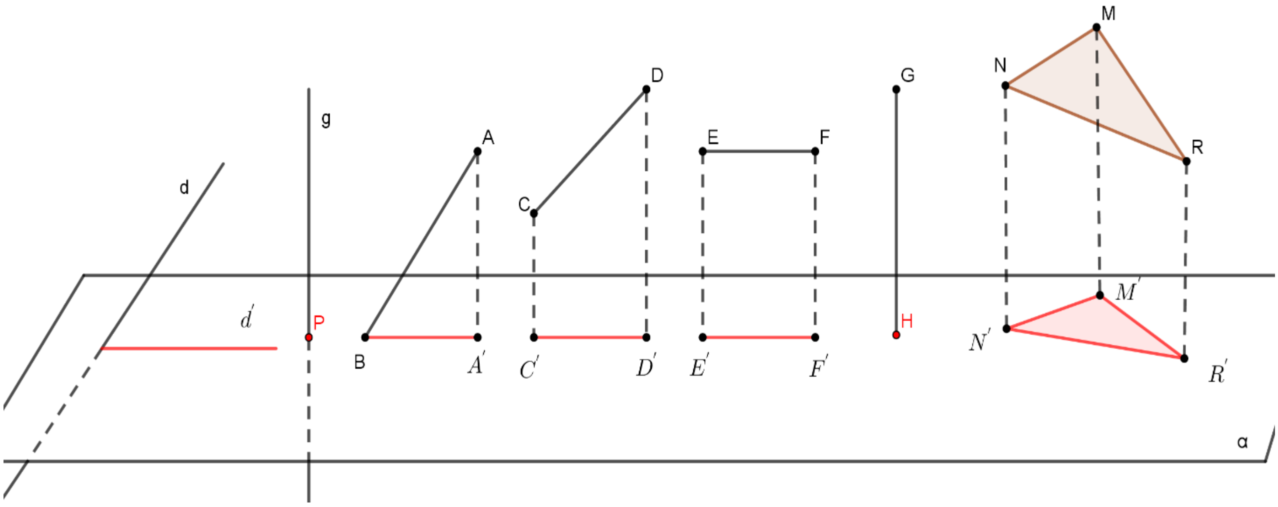
$$\left.\begin{array}{l} A \notin \alpha \\ AA' \perp \alpha \\ A' \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{\alpha} A = A'$$

$$B \in \alpha \Rightarrow pr_{\alpha} B = B$$

<u>*Ért.*</u> Valamely mértani alakzat síkra eső vetülete az alakzat pontjainak síkra eső vetületének halmaza.

<u>*Tétel.*</u> Egy egyenes vetülete egy síkra egy egyenes, ha nem merőleges a síkra és egy pont, ha az egyenes merőleges a síkra.

<u>*Tétel.*</u> Egy szakasz vetülete egy síkra egy szakasz, vagy egy pont, ha a szakasz taróegyenese merőleges a síkra.



$pr_{\alpha} g = P$
$g \perp \alpha$

$pr_{\alpha}[CD] = [C'D']$

$pr_{\alpha}[GH] = H$
$GH \perp \alpha$

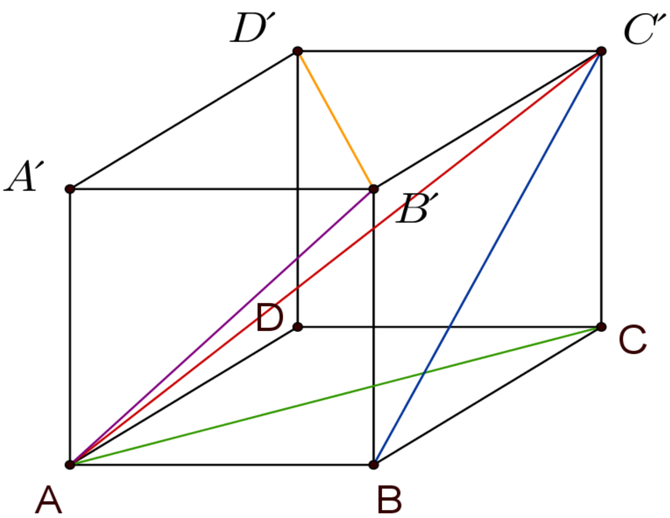
$pr_{\alpha} d = d'$ $\quad pr_{\alpha}[AB] = [BA']$ $\quad pr_{\alpha}[EF] = [E'F']$ $\quad pr_{\alpha} MNR_{\Delta} = M'N'R'_{\Delta}$

Megjegyzés: Gyakolatban ha egy szakaszt le kell vetiteni egy síkra, elég levetiteni a szakasz két végpontját.

prof. ȘTIRBU ERIKA
Școala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Carei

Alkalmazások:

1) Adott az ABCDA'B'C'D' kocka . Határozd meg a következő mértani alkzatok vetületét az adott síkkra .



a) $pr_{(ABC)}A'$; b) $pr_{(AA'D')}C$; c) $pr_{(A'B'C')}D$

d) $pr_{(DBC)}A$; e) $pr_{(ABC)}\left[A'B'\right]$;

f) $pr_{(ADD')}[BC]$; g) $pr_{(A'B'C')}[AC]$;

h) $pr_{(ABC)}\left[D'B'\right]$; i) $pr_{(ADD')}\left[BC'\right]$;

j) $pr_{(ABC)}\left[B'A\right]$; k) $pr_{(A'B'D')}\left[BC'\right]$;

l) $pr_{(ABC)}\left[AC'\right]$.

Megoldás: a) $\left.\begin{array}{l} AA' \perp AD \\ AA' \perp AB \\ AD, AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \perp (ABC) \Rightarrow pr_{(ABC)}A' = A.$

b) $\left.\begin{array}{l} D \in \left(AA'D'\right) \\ CD \perp \left(AA'D'\right) \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(AA'D')}C = D.$

c) $\left.\begin{array}{l} D' \in \left(A'B'C'\right) \\ DD' \perp \left(A'B'C'\right) \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(A'B'C')}D = D'.$

d) $A \in (DBC) \Rightarrow pr_{(DBC)}A = A.$

e) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ABC)}A' = A \\ pr_{(ABC)}B' = B \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABC)}\left[A'B'\right] = [AB].$

f) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ADD')}B = A \\ pr_{(ADD')}C = D \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ADD')}[BC] = [AD].$

g) $\left.\begin{array}{l} pr_{(A'B'C')}A = A' \\ pr_{(A'B'C')}C = C' \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(A'B'C')}[AC] = \left[A'C'\right].$

prof. ȘTIRBU ERIKA
Școala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Carei

h) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ABC)}D' = D \\ pr_{(ABC)}B' = B \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABC)}\left[D'B'\right] = \left[DB\right].$

i) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ADD')}B = A \\ pr_{(ADD')}C' = D' \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ADD')}\left[BC'\right] = \left[AD'\right].$

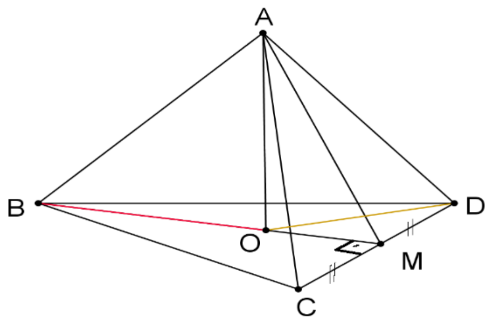
j) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ABC)}B' = B \\ pr_{(ABC)}A = A \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABC)}\left[B'A\right] = \left[AB\right].$

k) . $\left.\begin{array}{l} pr_{(A'B'D')}B = B' \\ pr_{(A'B'D')}C' = C' \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(A'B'D')}\left[BC'\right] = \left[B'C'\right].$

l) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ABC)}A = A \\ pr_{(ABC)}C' = C \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABC)}\left[AC'\right] = \left[AC\right].$

2) Tekintsük az ABCD szabályos tetraédert. Tudjuk, hogy az AB élnek a (BCD) síkra eső vetülete $8\sqrt{3}$ cm, és M a [CD] él felezőpontja. Határozd meg az alábbi szakaszok hosszát:

a) $pr_{(BCD)}[AM]$; b) $pr_{(ABM)}[BC]$; c) $pr_{(BCD)}[AD]$.



Megoldás: a) Legyen $AO \perp (BCD), O \in (BCD)$.
Mivel ABCD szabályos tetraéder, ezért O a BCD egyenlő oldalú háromszög súlypontja. BM oldalfelező $\Rightarrow O \in BM$.

$\left.\begin{array}{l} pr_{(BCD)}B = B \\ pr_{(BCD)}A = O \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(BCD)}[BA] = [BO] \Rightarrow BO = 8\sqrt{3}$ cm

$\left.\begin{array}{l} pr_{(BCD)}A = O \\ pr_{(BCD)}M = M \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(BCD)}[AM] = [OM].$ $OM = \frac{OB}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm.

b) $\left.\begin{array}{l} AO \perp (BCD) \\ CD \subset (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow AO \perp CD.$

prof. ȘTIRBU ERIKA
Școala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Carei

Mivel a BCD háromszög egyenlő oldalú, ezért a BM oldalfelező egyben magasság is.

$$\left.\begin{array}{l} CM \perp BM \\ CM \perp AO \\ BM, AO \subset (ABM) \end{array}\right\} \Rightarrow CM \perp (ABM) \Rightarrow pr_{(ABM)}C = M \;;$$

$$\left.\begin{array}{l} pr_{(ABM)}C = M \\ pr_{(ABM)}B = B \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABM)}[BC] = [BM]; \quad BM = BO + OM = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm.}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} pr_{(BCD)}A = O \\ pr_{(BCD)}D = D \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(BCD)}[AD] = OD \;;$$

Mivel OD a BCD háromszög köré írt kör sugara, ezért OD = OB = $8\sqrt{3}$ cm.