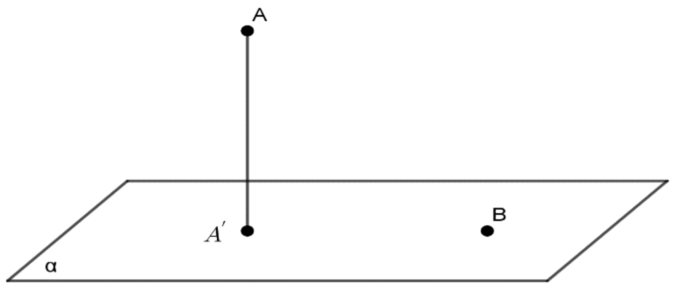
prof. ȘTIRBU ERIKA
Școala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Carei

Proiecții ortogonale pe un plan

<u>*Def.*</u> Prin **proiecția ortogonală a unui punct** A **pe un plan** înțelegem piciorul perpendicularei duse din acel punct pe plan.

<u>*Obs.*</u> Dacă un punct aparține planului, atunci proiecția lui este el însuși.



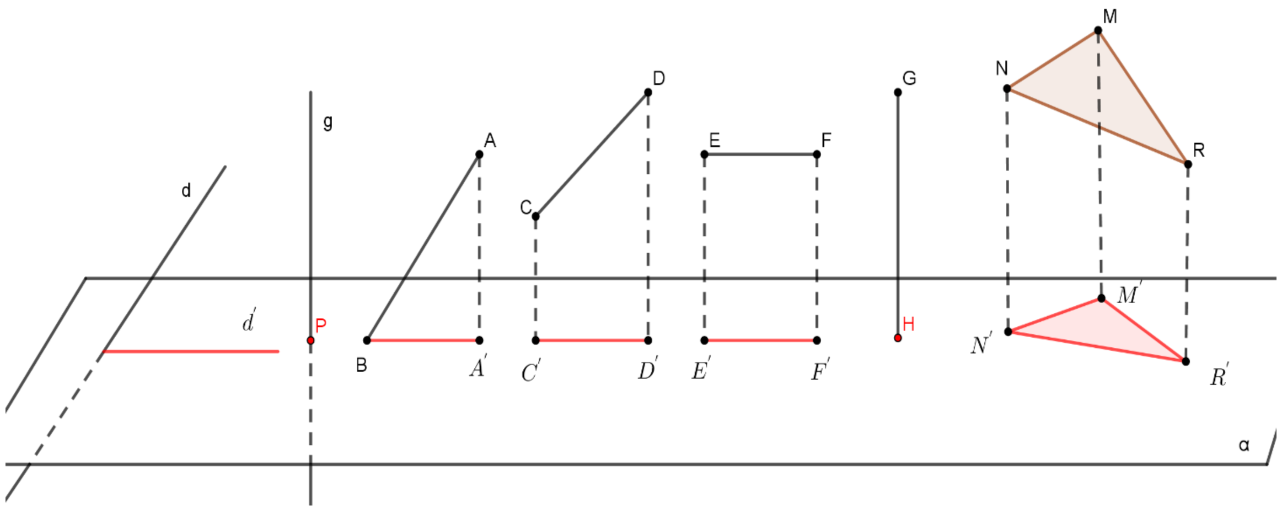
$$\left.\begin{array}{l} A \notin \alpha \\ AA' \perp \alpha \\ A' \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{\alpha} A = A'$$

$$B \in \alpha \Rightarrow pr_{\alpha} B = B$$

<u>*Def.*</u> Proiecția unei figuri geometrice pe un plan este mulțimea formată din proiecțiile tuturor punctelor figurii pe acel plan.

<u>*Teoremă.*</u> Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă, dacă ea nu este perpendiculară pe plan, sau un punct, dacă dreapta este perpendiculară pe plan.

<u>*Teoremă.*</u> Proiecția unui segment pe un plan este un segment, sau un punct în cazul în care dreapta suport a segmentului este perpendicularăpe plan.



$pr_{\alpha} g = P$
$g \perp \alpha$

$pr_{\alpha}[CD] = [C'D']$

$pr_{\alpha}[GH] = H$
$GH \perp \alpha$

$pr_{\alpha} d = d'$

$pr_{\alpha}[AB] = [BA']$

$pr_{\alpha}[EF] = [E'F']$

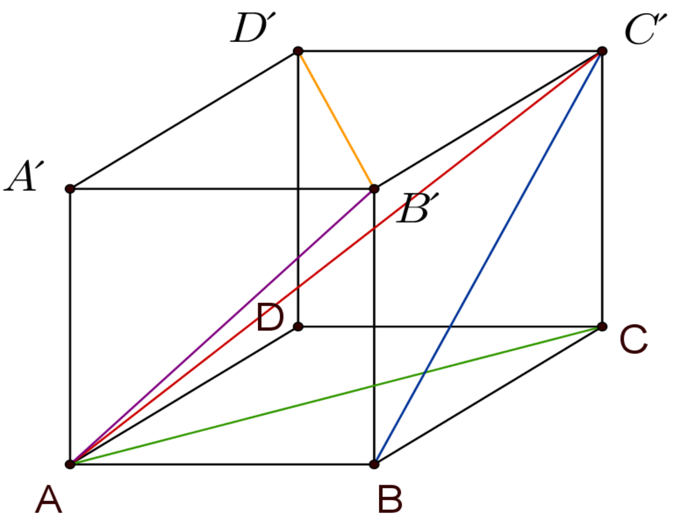
$pr_{\alpha} \triangle MNR = \triangle M'N'R'$

Observație: În practică pentru a proiecta un segment pe un plan , este suficient să proiectăm capetele acelui segment.

prof. ȘTIRBU ERIKA
Școala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Carei

Aplicații:

1) Fie cubul ABCDA'B'C'D'. Determinați proiecțiile următoarelor figuri geometrice pe planele indicate.



a) $pr_{(ABC)}A^{'}$; b) $pr_{(AA^{'}D^{'})}C$; c) $pr_{(A^{'}B^{'}C^{'})}D$

d) $pr_{(DBC)}A$; e) $pr_{(ABC)}\left[A^{'}B^{'}\right]$;

f) $pr_{(ADD^{'})}[BC]$; g) $pr_{(A^{'}B^{'}C^{'})}[AC]$;

h) $pr_{(ABC)}\left[D^{'}B^{'}\right]$; i) $pr_{(ADD^{'})}\left[BC^{'}\right]$;

j) $pr_{(ABC)}\left[B^{'}A\right]$; k) $pr_{(A^{'}B^{'}D^{'})}\left[BC^{'}\right]$;

l) $pr_{(ABC)}\left[AC^{'}\right]$.

Soluție: a) $\left.\begin{array}{l} AA^{'} \perp AD \\ AA^{'} \perp AB \\ AD, AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AA^{'} \perp (ABC) \Rightarrow pr_{(ABC)}A^{'} = A$.

b) $\left.\begin{array}{l} D \in \left(AA^{'}D^{'}\right) \\ CD \perp \left(AA^{'}D^{'}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(AA^{'}D^{'})}C = D$.

c) $\left.\begin{array}{l} D^{'} \in \left(A^{'}B^{'}C^{'}\right) \\ DD^{'} \perp \left(A^{'}B^{'}C^{'}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(A^{'}B^{'}C^{'})}D = D^{'}$.

d) $A \in (DBC) \Rightarrow pr_{(DBC)}A = A$.

e) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ABC)}A^{'} = A \\ pr_{(ABC)}B^{'} = B \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABC)}\left[A^{'}B^{'}\right] = [AB]$.

f) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ADD^{'})}B = A \\ pr_{(ADD^{'})}C = D \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ADD^{'})}[BC] = [AD]$.

g) $\left.\begin{array}{l} pr_{(A^{'}B^{'}C^{'})}A = A^{'} \\ pr_{(A^{'}B^{'}C^{'})}C = C^{'} \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(A^{'}B^{'}C^{'})}[AC] = \left[A^{'}C^{'}\right]$.

prof. ȘTIRBU ERIKA
Școala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Carei

h) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ABC)}D' = D \\ pr_{(ABC)}B' = B \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABC)}\left[D'B'\right] = [DB].$

i) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ADD')}B = A \\ pr_{(ADD')}C' = D' \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ADD')}\left[BC'\right] = \left[AD'\right].$

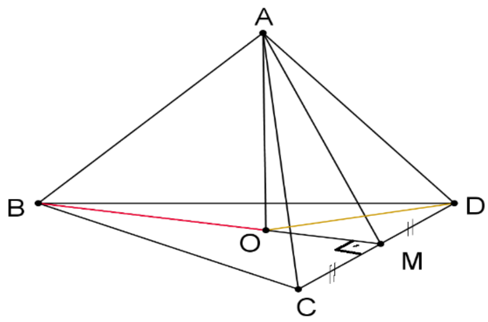
j) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ABC)}B' = B \\ pr_{(ABC)}A = A \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABC)}\left[B'A\right] = [AB].$

k) . $\left.\begin{array}{l} pr_{(A'B'D')}B = B' \\ pr_{(A'B'D')}C' = C' \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(A'B'D')}\left[BC'\right] = \left[B'C'\right].$

l) $\left.\begin{array}{l} pr_{(ABC)}A = A \\ pr_{(ABC)}C' = C \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABC)}\left[AC'\right] = [AC].$

2) Fie tetraedrul regulat ABCD. Proiecția muchiei AB pe planul (BCD) are lungimea de $8\sqrt{3}$ cm, iar punctul M este mijlocul muchiei [CD]. Aflați lungimile următoarelor segmente:

a) $pr_{(BCD)}[AM]$;   b) $pr_{(ABM)}[BC]$;   c) $pr_{(BCD)}[AD]$.



Soluție: a) Fie $AO \perp (BCD), O \in (BCD)$. Deoarece ABCD este tetraedru regulat, deducem că O este centrul de greutate al triunghiului echilateral BCD. BM fiind mediană $\Rightarrow O \in BM$.

$\left.\begin{array}{l} pr_{(BCD)}B = B \\ pr_{(BCD)}A = O \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(BCD)}[BA] = [BO] \Rightarrow BO = 8\sqrt{3}$ cm

$\left.\begin{array}{l} pr_{(BCD)}A = O \\ pr_{(BCD)}M = M \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(BCD)}[AM] = [OM].$ $OM = \frac{OB}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm.

b) $\left.\begin{array}{l} AO \perp (BCD) \\ CD \subset (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow AO \perp CD$. Triunghiul BCD fiind echilateral, mediana BM este înălțime.

$\left.\begin{array}{l} CM \perp BM \\ CM \perp AO \\ BM, AO \subset (ABM) \end{array}\right\} \Rightarrow CM \perp (ABM) \Rightarrow pr_{(ABM)}C = M$;

$\left.\begin{array}{l} pr_{(ABM)}C = M \\ pr_{(ABM)}B = B \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(ABM)}[BC] = [BM];$ $BM = BO + OM = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ cm.

prof. ȘTIRBU ERIKA
Școala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Carei

c) $\left.\begin{array}{l} pr_{(BCD)}A = O \\ pr_{(BCD)}D = D \end{array}\right\} \Rightarrow pr_{(BCD)}[AD] = OD$;

Cum OD este raza cecului circumscris triunghiului BCD, deducem că OD = OB = $8\sqrt{3}$ cm.