ARII ȘI VOLUME ALE UNOR POLIEDRE

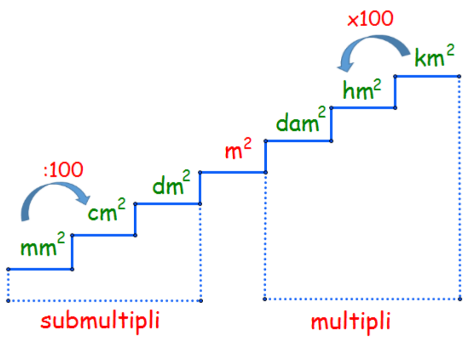
Toate fețele poliedrelor sunt suprafețe poligonale, iar desfășurarea în plan a unui poliedru este o suprafață formată din reuniunea mai multor suprafețe poligonale disjuncte, reprezentând fețele poliedrului (fețe laterale sau baze).

Definiții: 1) Suma ariilor fețelor laterale ale unui poliedru se numește *arie laterală* și se notează cu A_l .

2) Suma ariilor tuturor fețelor unui poliedru se numește *arie totală* și se notează cu A_t .

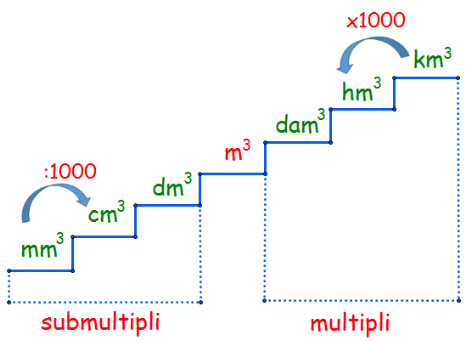
Observații: 1) Aria totală a unui poliedru este suma dintre aria laterală și aria bazei/bazelor poliedrului.

2) Unitatea de măsură standard pentru arii este *metrul pătrat* (m^2), adică suprafața unui pătrat cu latura de 1 m, însă pentru exprimarea unei arii se folosesc și submultiplii/multiplii metrului pătrat.



Din clasele primare știm că volumul este proprietatea unui corp de a ocupa un loc în spațiu și că lichidele iau forma vaselor ce le conțin. Intuitiv volumul unui corp constă din cantitatea de lichid care umple interiorul corpului.

Observații: 1) Unitatea de măsură standard pentru volum este *metrul cub* (m^3), adică spațiul ocupat de un cub cu muchia de 1 m, însă pentru exprimarea unui volum se folosesc și submultiplii/multiplii metrului cub.



2) Pentru volumul vaselor ce conțin lichide se mai folosește și denumirea de capacitate, iar unitatea de măsură pentru volumul lichidelor este *litrul* (*l*), un litru fiind egal cu un decimetru cub ($1\ l = 1\ dm^3$).

3) Pentru aflarea volumului unui poliedru folosim aproximări prin numărul minim de cuburi cu muchia de 1 unitate care să "acopere" poliedrul și vom spune că volumul poliedrului este egal cu *n* unități^3 dacă el poate fi acoperit de *n* cuburi cu latura de 1 unitate.

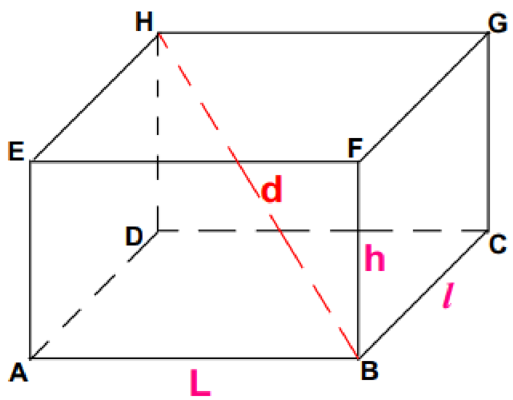
1. Aria și volumul prismei drepte

Reamintim!!!

1) Prisma dreaptă este prisma care are muchiile laterale perpendiculare pe planul bazei.

2) Înălțimea prismei drepte (distanța dintre bazele prismei) este egală cu muchia laterală a prismei.

A. Paralelipipedul dreptunghic este prisma dreaptă ce are ca bază un dreptunghi.



- toate fețele sunt dreptunghiuri
- oricare două fețe opuse pot fi considerate baze
- oricare două fețe opuse sunt congruente

Notăm cu:

L (lungimea), l (lățimea) și h (înălțimea) – dimensiunile paralelipipedului dreptunghic

d – diagonala paralelipipedului dreptunghic

P_b – perimetrul bazei ; A_b – aria bazei

A_l – aria laterală ; A_t – aria totală

V – volumul

$$\boxed{d^2 = L^2 + l^2 + h^2}$$

$$\boxed{A_l = 2(L\cdot h + l\cdot h) = 2(L + l)\cdot h = P_b \cdot h}$$

$$\boxed{A_t = A_l + 2\cdot A_b \Rightarrow A_t = 2(L\cdot l + L\cdot h + l\cdot h)}$$

Paralelipipedul dreptunghic din desenul alăturat are dimensiunile L, l și h. Acesta se poate descompune în $L\cdot l\cdot h$ cuburi cu muchia de 1 unitate.

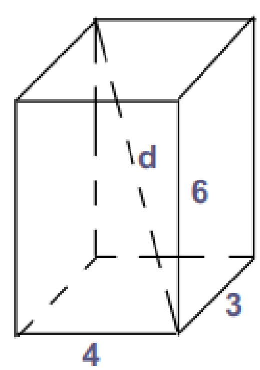
Vom spune că volumul paralelipipedului dreptunghic este $L\cdot l\cdot h$ unități^3 .

$$\boxed{V = L\cdot l\cdot h} \text{ sau } \boxed{V = A_b \cdot h}$$

Problema 1.

Aflați diagonala, aria totală și volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 cm, 6 cm și 4 cm.

Rezolvare:



$d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$

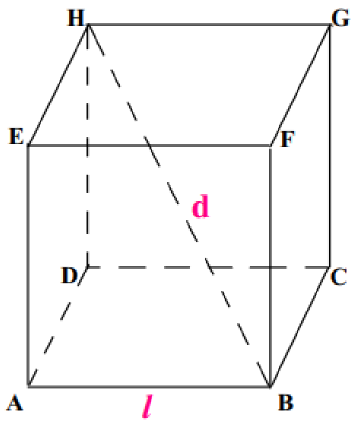
$d = \sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 36 + 16} = \sqrt{61}$ (cm)

$A_t = 2(L\cdot l + L\cdot h + l\cdot h)$

$A_t = 2(3\cdot 6 + 3\cdot 4 + 6\cdot 4) = 2(18 + 12 + 24) = 2\cdot 54 = 108$ (cm^2)

$V = L\cdot l\cdot h = 3\cdot 6\cdot 4 = 72$ (cm^3)

B. Cubul este paralelipipedul dreptunghic cu toate muchiile egale .



- toate fețele cubului sunt pătrate și sunt congruente

Notăm cu:

l – muchia cubului ; d – diagonala cubului

- deducem formulele pentru ariile și volumul cubului din formulele corespunzătoare ale paralelipipedului dreptunghic având în vedere că:

$$L = l = h$$

$d^2 = 3 \cdot l^2$ => $\boxed{d = l\sqrt{3}}$

$\boxed{A_l = 4 \cdot l^2}$

$\boxed{A_t = 6 \cdot l^2}$

$\boxed{V = l^3}$

Problema 2.

Un cub are aria egală cu 150 cm^2. Determinați:

a) latura cubului;

b) diagonala cubului;

c) volumul cubului.

Rezolvare:

a) $A_t = 6 \cdot l^2 \Rightarrow 6 \cdot l^2 = 150 \Rightarrow l^2 = 25 \Rightarrow l = 5$ (cm)

b) $d = l\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ (cm)

c) $V = l^3 = 5^3 = 125$ (cm^3)

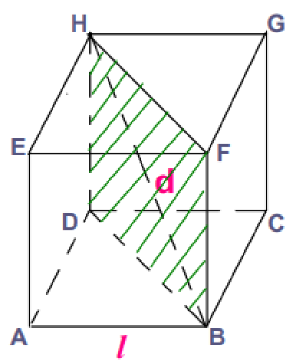
Problema 3.

Aria secțiunii diagonale a unui cub este $64\sqrt{2}$ cm^2. Determinați:

a) lungimea muchiei cubului;

b) volumul cubului.

Rezolvare:



a) Notăm cubul cu ABCDEFGH și cu l lungimea muchiei cubului.
Una dintre secțiunile diagonale ale cubului ABCDEFGH este dreptunghiul BDHF (secțiune transversală a cubului care conține una dintre diagonalele acestuia).

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BDHF}} = 64\sqrt{2}\text{ cm}^2 \Rightarrow \text{BD} \cdot \text{DH} = 64\sqrt{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{BD} \cdot l = 64\sqrt{2} \\ \text{BD este diagonala pătratului ABCD de latură } l \Rightarrow \text{BD} = l\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow l\sqrt{2} \cdot l = 64\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \quad l^2 \cdot \sqrt{2} = 64\sqrt{2}$

$l^2 = 64 \Rightarrow l = 8$ (cm)

b) $V = l^3 = 8^3 = 512$ (cm^3)

2. Aria și volumul prismei drepte regulate

Reamintim!!!

1) Prisma dreaptă regulată este prisma dreaptă cu bazele poligoane regulate (ex: triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat).

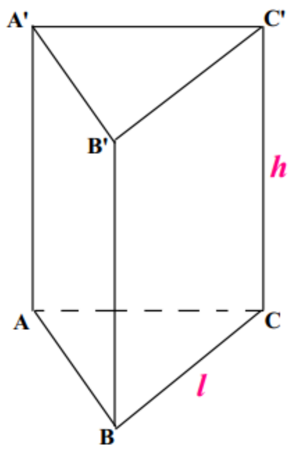
2) Formulele de calcul pentru ariile și volumul prismei drepte sunt:

$$A_l = P_b \cdot h\ ,\ \ A_t = A_l + 2 \cdot A_b \text{ și } V = A_b \cdot h$$

3)

Formule de calcul pentru ariile poligoanelor regulate cu latura de lungime *l*	
Triunghi echilateral	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
Pătrat	l^2
Hexagon regulat	$\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$

A. Prisma triunghiulară regulată este prisma dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale.



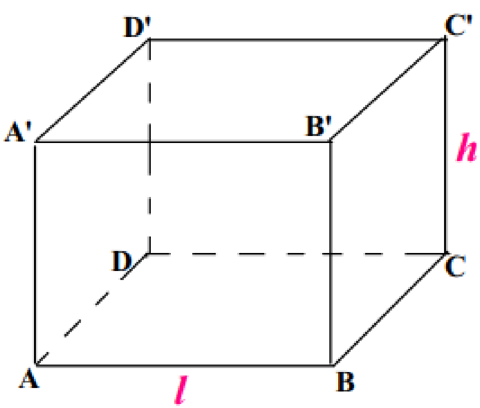
$$\boxed{P_b = 3 \cdot l \text{ și } A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$A_l = P_b \cdot h \Rightarrow \boxed{A_l = 3l \cdot h}$$

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 3l \cdot h + 2 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A_t = 3l \cdot h + \frac{l^2\sqrt{3}}{2}}$$

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \frac{l^2 h\sqrt{3}}{4}}$$

B. Prisma patrulateră regulată este prisma dreaptă cu bazele pătrate.



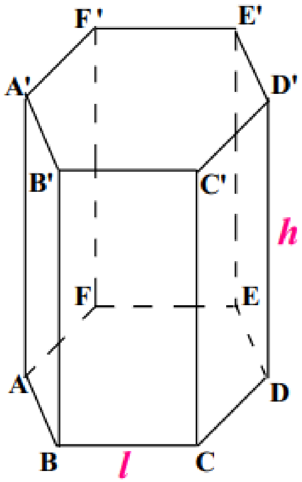
$$\boxed{P_b = 4 \cdot l \text{ și } A_b = l^2}$$

$$A_l = P_b \cdot h \Rightarrow \boxed{A_l = 4l \cdot h}$$

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 4l \cdot h + 2 \cdot l^2 \Rightarrow \boxed{A_t = 2l \cdot (2h + l)}$$

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow \boxed{V = l^2 \cdot h}$$

C. Prisma hexagonală regulată este prisma dreaptă cu bazele hexagoane regulate.



$\boxed{P_b = 6 \cdot l \text{ și } A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}}$

$A_l = P_b \cdot h \Rightarrow \boxed{A_l = 6l \cdot h}$

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 6l \cdot h + 2 \cdot \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_t = 6l \cdot h + 3l^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\boxed{A_t = 3l \cdot (2h + l\sqrt{3})}$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \frac{3l^2 h\sqrt{3}}{2}}$

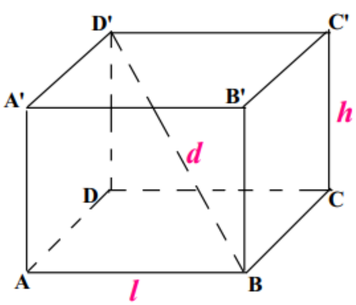
Observație: Formulele pe care le-am dedus pentru toate prismele drepte particulare, *nu trebuie neapărat memorate*. Acestea se pot deduce din datele concrete ale problemei, având în vedere formulele pentru ariile și volumul prismei drepte:

$$\boxed{A_l = P_b \cdot h,\ A_t = A_l + 2 \cdot A_b \text{ și } V = A_b \cdot h}$$

Problema 4.

Volumul și aria laterală a unei prisme patrulatere regulate sunt de 150 cm^3, respectiv 120 cm^2. Arătați că diagonala prismei are lungimea mai mare de 9 cm.

Rezolvare:



Notăm cu l latura bazei, cu h înălțimea prismei și cu d diagonala acesteia.

$A_l = 120 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4l \cdot h = 120 \mid :4 \Rightarrow l \cdot h = 30$

$V = 150 \text{ cm}^3 \Rightarrow l^2 \cdot h = 150 \Rightarrow l \cdot 30 = 150 \Rightarrow l = 5 \text{ (cm)}$

$5 \cdot h = 30 \Rightarrow h = 6 \text{ (cm)}$

Știm că într-un paralelipiped dreptunghic formula diagonalei este

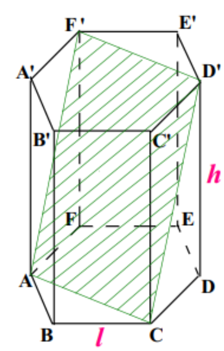
$d^2 = L^2 + l^2 + h^2$ și în cazul nostru L = l = 5 cm, h = 6cm, deci

$d^2 = 25+25+36 \Rightarrow d = \sqrt{86} > \sqrt{81} = 9 \text{ (cm)}$

Problema 5.

Prisma hexagonală regulată ABCDEFA'B'C'D'E'F' are AB = 6 cm, iar $A_{ACD'F'} = 60\sqrt{3}$ cm^2. Calculați volumul prismei.

Rezolvare:



$A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3AB^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 6^2\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3} \text{ (cm}^2)$

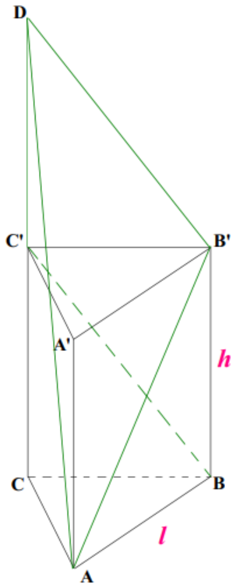
Patrulaterul ACD'F' este un dreptunghi cu AC = AB$\sqrt{3}$ = 6$\sqrt{3}$ (cm) și pentru că $A_{ACD'F'}$ = 60$\sqrt{3}$ cm^2, avem AC · AF' = 60$\sqrt{3}$ => 6$\sqrt{3}$ · AF'= 60$\sqrt{3}$ => AF' = 10 (cm)

În ΔAFF' dreptunghic în F, FF' = $\sqrt{AF'^2 - AF^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ (cm)

$V = \frac{3l^2 h\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 6^2 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 432\sqrt{3} \text{ (cm}^3)$

Problema 6.

Volumul unei prisme triunghiulare regulate ABCA'B'C' cu latura bazei ***l*** este de $\frac{l^3\sqrt{6}}{8}$. Determinați m($\widehat{AB', BC'}$).



Rezolvare:

ΔABC echilateral => $A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$$V = A_b \cdot h = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$V = \frac{l^3\sqrt{6}}{8} \Rightarrow \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{l^3\sqrt{6}}{8} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

Prelungim muchia CC' cu C'D = CC', C' ∈ [CD] => C'D = BB' și C'D ∥ BB' =>
=> BB'DC' paralelogram => B'D ∥ BC', deci m($\widehat{AB', BC'}$) = m($\widehat{AB', B'D}$) = m($\widehat{AB'D}$)

În ΔACD dreptunghic în C, AD = $\sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{l^2 + (2h)^2} = \sqrt{l^2 + (l\sqrt{2})^2} = \sqrt{3l^2} =$
$= l\sqrt{3}$

În ΔABB' dreptunghic în B, AB' = $\sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}l^2} = \frac{l\sqrt{6}}{2}$

În ΔAB'D, AB' = B'D = $\frac{l\sqrt{6}}{2}$ și AD = $l\sqrt{3}$ => $AD^2 = AB'^2 + B'D^2$ => ΔAB'D este dreptunghic în B' => m($\widehat{AB'D}$) = 90^0.

Deci m($\widehat{AB', BC'}$) = 90^0 .

3. Aria și volumul piramidei regulate

Reamintim!!!

1) Piramida regulată are baza poligon regulat (ex: triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat) și muchiile laterale congruente.

2) Fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente, iar înălțimea unei fețe laterale se numește apotema piramidei (notată cu $\boldsymbol{a_p}$).

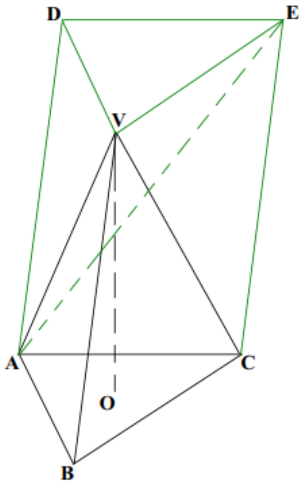
3) Înălțimea piramidei regulate (notată cu ***h***) este distanța de la vârful piramidei la planul bazei, iar proiecția ortogonală a vârfului piramidei regulate pe planul bazei este centrul cercului circumscris poligonului de bază.

Observație: Deoarece fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente formulele de calcul pentru ariile piramidei regulate sunt:

$$\boxed{A_l = n \cdot \frac{l \cdot a_p}{2} = \frac{P_b \cdot a_p}{2} \text{ și } A_t = A_l + A_b = \frac{P_b \cdot (a_p + a_b)}{2}},$$

unde ***n*** reprezintă numărul laturilor poligonului regulat bază a piramidei, ***l*** latura poligonului bază, iar $\boldsymbol{a_b}$ apotema bazei .

Vom stabili formula de calcul a volumului unei piramide cu ajutorul celui mai simplu tip de piramidă: tetraedrul.



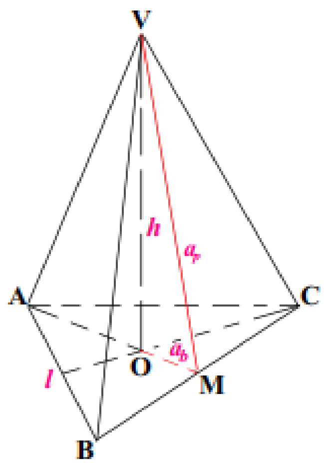
Fie tetraedrul VABC. Construim [AD] și [CE] paralele și egale cu muchia [VB] a tetraedrului și obținem o prismă ABCDVE cu baza egală cu a tetraedrului dat și cu aceeași înălțime.

Din prismă extragem tetraedrul inițial și obținem o piramidă patrulateră VACED cu baza paralelogramul ACED. Cu o construcție auxiliară (diagonala paralelogramului, [AE]) o împărțim și pe aceasta în două tetraedre de volume egale (deoarece au bazele congruente și aceeași înălțime), VADE, respectiv VCEA. Dacă comparăm tetraedrul VADE cu tetraedrul inițial VABC observăm că au același volum, având bazele egale și înălțimea comună [VO]. Deci $V_{VABC} = V_{VADE} = V_{VCEA}$.

$$V_{ABCDVE} = 3 \cdot V_{VABC} \Rightarrow V_{VABC} = \frac{V_{ABCDVE}}{3} = \frac{A_{ABC} \cdot VO}{3} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Observație: O piramidă care are ca bază un poligon cu *n* laturi se descompune în *n*-2 piramide triunghiulare cu aceeași înălțime. Formula de calcul $\boxed{V = \frac{A_b \cdot h}{3}}$, identificată pentru piramida triunghiulară, rămâne adevărată pentru orice piramidă.

A. Piramida triunghiulară regulată este piramida regulată cu baza triunghi echilateral.



$$\boxed{P_b = 3 \cdot l, \quad A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{și} \quad a_p^2 = h^2 + a_b^2, \text{ unde } a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6}}$$

$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} \Rightarrow \boxed{A_l = \frac{3l \cdot a_p}{2}}$$

$$A_t = A_l + A_b \Rightarrow \boxed{A_t = \frac{3l \cdot a_p}{2} + \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{l^2 \cdot h\sqrt{3}}{12}}$$

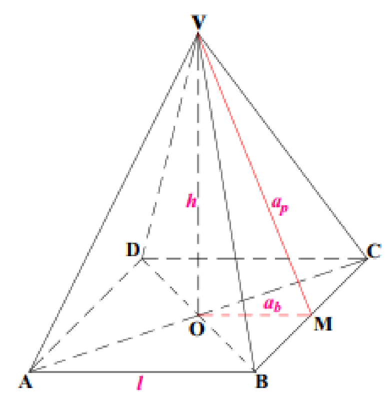
B. Piramida patrulateră regulată este piramida regulată cu baza pătrat.

$$\boxed{P_b = 4 \cdot l, \quad A_b = l^2 \quad \text{și} \quad a_p^2 = h^2 + a_b^2, \text{unde } a_b = \frac{l}{2}}$$

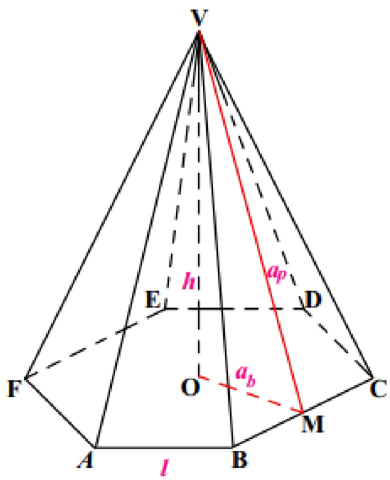
$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} \Rightarrow A_l = \frac{4l \cdot a_p}{2} \Rightarrow A_l = 2l \cdot a_p$$

$$A_t = A_l + A_b \Rightarrow \boxed{A_t = 2l \cdot a_p + l^2}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{l^2 \cdot h}{3}}$$



C. Piramida hexagonală regulată este piramida regulată cu baza hexagon regulat.



$\boxed{P_b = 6 \cdot l, \quad A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad a_p^2 = h^2 + a_b^2, \text{ unde } a_b = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$

$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} \Rightarrow A_l = \frac{6l \cdot a_p}{2} \Rightarrow \boxed{A_l = 3l \cdot a_p}$

$A_t = A_l + A_b \Rightarrow \boxed{A_t = 3l \cdot a_p + \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}}$

$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{l^2 \cdot h\sqrt{3}}{2}}$

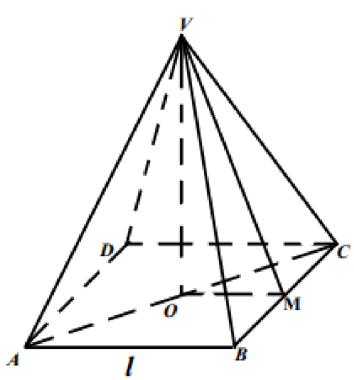
Observație: Formulele pe care le-am dedus pentru toate piramidele regulate particulare, *nu trebuie neapărat memorate*. Acestea se pot deduce din datele concrete ale problemei, având în vedere formulele pentru ariile și volumul piramidei regulate:

$$\boxed{A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}, \quad A_t = A_l + A_b \text{ și } V = \frac{A_b \cdot h}{3}}$$

Problema 7.

O piramidă patrulateră regulată are latura bazei l și aria secțiunii diagonale echivalentă cu aria bazei. Determinați aria laterală a piramidei.

Rezolvare:



Notăm piramida patrulateră regulată cu VABCD (VO înălțimea piramidei).
Una dintre secțiunile diagonale ale piramidei este triunghiul VAC (secțiune transversală a piramidei care conține vârful piramidei și una dintre diagonalele bazei).

$A_{VAC} = A_{ABCD} \Rightarrow \frac{VO \cdot AC}{2} = AB^2$

VABCD piramidă patrulateră regulată => ABCD pătrat cu latura l, iar [AC] este diagonală => $AC = l\sqrt{2}$

$\frac{VO \cdot l\sqrt{2}}{2} = l^2 \Rightarrow VO = l\sqrt{2}$

În ΔVOC dreptunghic în O, $VC = \sqrt{VO^2 + OC^2} = \sqrt{(l\sqrt{2})^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5l^2}{2}} = \frac{l\sqrt{10}}{2}$

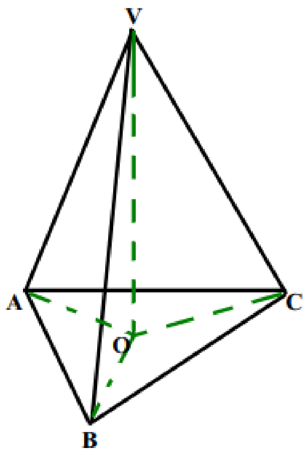
Fie VM înălțimea feței VBC, un triunghi isoscel cu $VB = VC = \frac{l\sqrt{10}}{2}$ și $BC = l \Rightarrow VM = \sqrt{VC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \frac{3l}{2}$

$A_l = 2l \cdot VM = 2l \cdot \frac{3l}{2} = 3l^2$

Problema 8.

O piramidă triunghiulară regulată are aria laterală $56\sqrt{6}$ cm^2, iar distanța de la centrul bazei la o față laterală $3\sqrt{2}$ cm. Calculați volumul piramidei.

Rezolvare:



Știm că într-o piramidă regulată ariile fețelor laterale sunt egale și distanța de la centrul bazei la fețele laterale este aceeași.

Notăm piramida cu VABC și o descompunem în trei piramide de aceeași bază (fețele laterale) și aceeași înălțime (distanța de la centrul bază la fețele laterale) : OVAB, OVBC, OVAC.

$A_l = 3 \cdot A_f$, unde A_f = aria unei fețe laterale

Notăm cu d distanța de la centrul bazei la o față laterală.

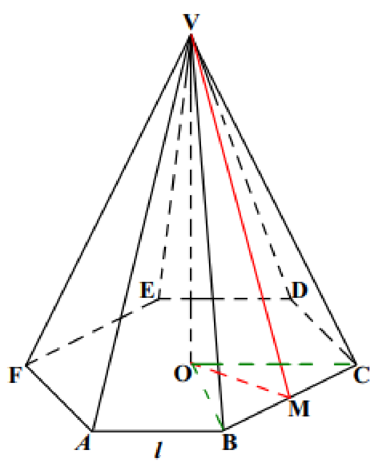
$V_{VABC} = V_{OVAB} + V_{OVBC} + V_{OVAC} = 3 \cdot V_{OVAB} = 3 \cdot \frac{A_f \cdot d}{3} = A_f \cdot d = \frac{A_l}{3} \cdot d = \frac{56\sqrt{6}}{3} \cdot 3\sqrt{2} =$

$= 56\sqrt{12} = 112\sqrt{3}$ (cm^3)

Problema 9.

O piramidă hexagonală regulată VABCDEF are muchia bazei AB = 3 cm și muchia laterală VA = 6 cm. Determinați volumul și aria laterală a piramidei.

Rezolvare:



În ΔVOB dreptunghic în O, VO = $\sqrt{VB^2 - OB^2} = \sqrt{VB^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2}$ $= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ (cm)

$A_{ABCDEF} = 6 \cdot A_{BOC} = 6 \cdot \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ (cm^2)

$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow V_{VABCDEF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{81}{2} = 40,5$ (cm^3)

OM = $\frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm)

În ΔVOM dreptunghic în O, VM = $\sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{27 - \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2} = 4,5$ (cm)

$A_l = 6 \cdot A_{VBC} = 6 \cdot \frac{VM \cdot BC}{2} = 3 \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{81}{2} = 40,5$ (cm^2)

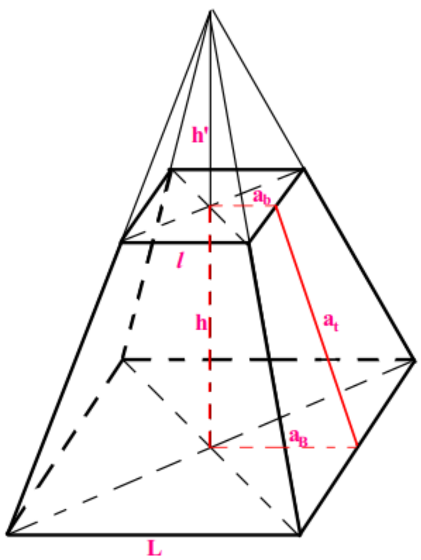
4. Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată

Reamintim!!!

1) Prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza se obține o piramidă asemenea cu piramida inițială, iar prin detașarea piramidei de la vârf se obține un poliedru numit **trunchi de piramidă**.
2) Dacă piramida secționată este o piramidă regulată, atunci trunchiul de piramidă obținut se numește **trunchi de piramidă regulată**.

Definiție: Segmentul determinat de mijloacele a două muchii ale bazelor unui trunchi de piramidă regulată, situate pe aceeași față laterală, se numește apotema trunchiului de piramidă regulată și se notează cu $\boldsymbol{a_t}$.

Observație: Fețele laterale ale trunchiului de piramidă regulată sunt trapeze isoscele.



Notăm: n = numărul laturilor poligonului bază
L = latura bazei mari
l = latura bazei mici
P_B = perimetrul bazei mari
P_b = perimetrul bazei mici
A_B = aria bazei mari
A_b = aria bazei mici
h = înălțimea trunchiului de piramidă regulată
a_t = apotema trunchiului de piramidă regulată
a_B = apotema bazei mari
a_b = apotema bazei mici
h' = înălțimea piramidei mici

$a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$

A_l = suma ariilor fețelor laterale => $A_l = n \cdot \frac{(L+l)\cdot a_t}{2} = \frac{(nL+nl)\cdot a_t}{2} = \frac{(P_B+P_b)\cdot a_t}{2}$

$A_t = A_l + A_B + A_b$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot (h + h') - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h'$

Piramida mare și piramida mică sunt asemenea => $\frac{\frac{1}{3}\cdot A_b \cdot h'}{\frac{1}{3}\cdot A_B \cdot (h+h')} = \left(\frac{h'}{h+h'}\right)^3$ => $\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{h'}{h+h'}\right)^2$ =>

=> $h' = \frac{h\left(\sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right)}{A_B - A_b}$

=> $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$

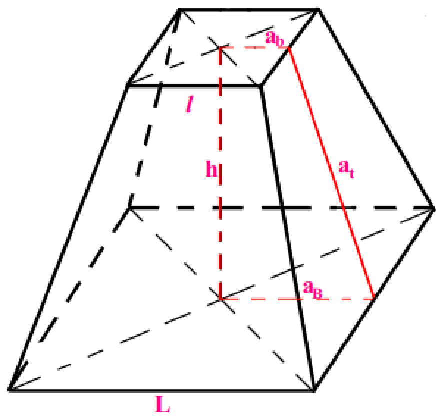
Formulele de calcul pentru ariile și volumul trunchiului de piramidă regulată sunt:

$\boxed{A_l = \frac{(P_B+P_b)\cdot a_t}{2}}$ $\boxed{A_t = A_l + A_B + A_b}$ $\boxed{V = \frac{1}{3}\cdot h \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})}$

Problema 10.

Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 4 cm, volumul 28 cm^3, iar aria bazei mici de 16 ori mai mică decât aria bazei mari. Calculați lungimea muchiei laterale.

Rezolvare:



$A_B = 16 \cdot A_b$

$V = 28$ cm^3 => $\frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) = 28$

$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (16A_b + A_b + \sqrt{16A_b \cdot A_b}) = 28$

$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (17\,A_b + 4\,A_b) = 28$

$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 21\,A_b = 28$ => $A_b = 1$ (cm^2) => $l^2 = 1$ => $l = 1$ (cm)

$A_B = 16 \cdot A_b = 16 \cdot 1$ cm$^2 = 16$ cm^2 => L^2 = 16 => L = 4 (cm)

Notăm cu *m* muchia trunchiului.

$m^2 = h^2 + \left(\frac{L\sqrt{2}}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2$

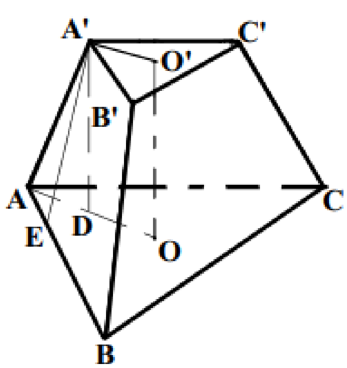
$m^2 = h^2 + \left(\frac{L\sqrt{2} - l\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$m^2 = h^2 + \frac{(L-l)^2}{2}$ => $m = \sqrt{h^2 + \frac{(L-l)^2}{2}} = \sqrt{16 + \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{82}}{2}$ (cm)

Problema 11.

Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de $6\sqrt{3}$ cm, latura bazei mici de $2\sqrt{3}$ cm și muchia laterală de 5 cm. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului.

Rezolvare:



Notăm cu ABCA'B'C' trunchiul de piramidă, centrele bazelor cu O, respectiv O'.

În trapezul AOO'A', A'O' = 2 cm, pentru că este raza cercului circumscris bazei mici a cărei latură este de $2\sqrt{3}$ cm, iar AO = 6 cm, pentru că este raza cercului circumscris bazei mari a cărei latură este de $6\sqrt{3}$ cm.

Fie D = pr$_{AO}$A', atunci în ΔA'DA dreptunghic în D avem $AA'^2 = A'D^2 + AD^2$

$25 = OO'^2 + (AO - A'O')^2$

$25 = OO'^2 + 16$ => OO' = 3 (cm)

Fie E = pr$_{AB}$A', atunci în ΔA'EA dreptunghic în E avem $A'E^2 = A'A^2 - AE^2$ =>

$A'E^2 = A'A^2 - \left(\frac{AB - A'B'}{2}\right)^2$ => $A'E^2 = 25 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2$ => $A'E = \sqrt{13}$ (cm)

$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$ => $A_l = \frac{24\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2} = 12\sqrt{39}$ (cm^2)

$A_B = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$ (cm^2) și $A_b = \frac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ (cm^2)

$A_t = A_l + A_B + A_b$ => $A_t = (12\sqrt{39} + 30\sqrt{3})$ (cm^2)

$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (27\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 9\sqrt{3}) = 39\sqrt{3}$ (cm^3)